

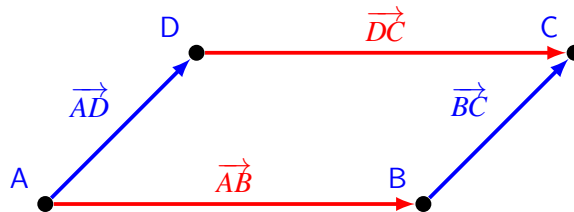
Coordenadas del 4 punto de un paralelogramo de vértices consecutivos, ecuación de la recta que pasa por un punto y es perpendicular al plano y área de un triángulo en el espacio.

Ejercicio. Considera el paralelogramo cuyos vértices consecutivos son los puntos $A(-3, 5, 9)$, $B(-6, 6, 7)$, $C(-1, -6, -9)$ y D .

1. Halla las coordenadas del punto D .
2. Calcula la ecuación de la recta r que pasa por el punto de coordenadas $P(-9, -5, 10)$ y es perpendicular al plano que contiene a los puntos A , B y C .
3. Calcular el área del triángulo de vértices A , B y C .

Solución

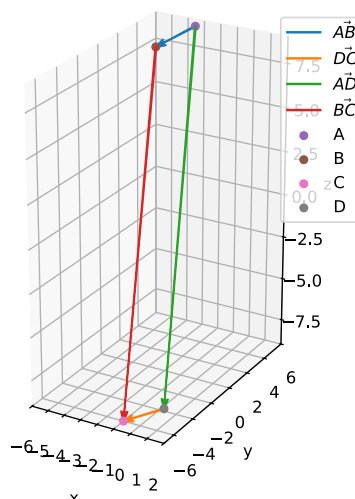
1. Como es un paralelogramo: $\begin{cases} \vec{AB} = \vec{DC} \\ \vec{AD} = \vec{BC} \end{cases}$.



A partir de cualquiera de las igualdades anteriores tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} A(-3, 5, 9) \\ B(-6, 6, 7) \\ C(-1, -6, -9) \\ D(x, y, z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{AB} = (-6, 6, 7) - (-3, 5, 9) = (-3, 1, -2) \\ \vec{DC} = (x, y, z) - (-1, -6, -9) = (-x-1, -y-6, -z-9) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$(-x-1, -y-6, -z-9) = (-3, 1, -2) \Rightarrow \begin{cases} -x-1 = -3 \\ -y-6 = 1 \\ -z-9 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -7 \\ z = -7 \end{cases} \Rightarrow D(2, -7, -7)$$



2. Se puede hacer de varias formas. Una de ellas es teniendo en cuenta que si la recta r es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A , B y C , el vector normal al plano es el vector director de la recta. Dos posibles vectores directores del plano son los vectores de coordenadas:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{AB} = (-6, 6, 7) - (-3, 5, 9) = (-3, 1, -2) \\ \vec{v} &= \vec{AC} = (-1, -6, -9) - (-3, 5, 9) = (2, -11, -18) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{AB} \\ \vec{v} &= \vec{AC} \end{aligned}} \right\}$$

por tanto $\vec{n}_\pi = \vec{u}_r = \vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -11 & -18 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -18 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -11 \end{vmatrix} \right) = (-40, -58, 31)$

En consecuencia, de la recta r conocemos $\begin{cases} P_r & (-9, -5, 10) \in r \\ \vec{u}_r & (-40, -58, 31) \end{cases} \Rightarrow$ su ecuación vectorial es

$$r \equiv (x, y, z) = (-9, -5, 10) + t \cdot (-40, -58, 31)$$

3. El área pedida se puede obtener con $\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -11 & -18 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -18 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -11 \end{vmatrix} \right) = (-40, -58, 31)$$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{|(-40, -58, 31)|}{2} = \frac{\sqrt{(-40)^2 + (-58)^2 + (31)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5925}}{2} = \frac{5\sqrt{237}}{2}$$