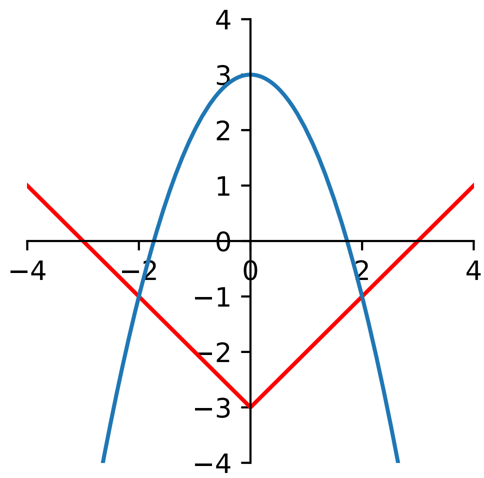
Cálculo del área entre las curvas de ecuación $y = |x| - a$ e $y = x^2 - a$

Ejercicio. Dibuja el recinto plano limitado entre las funciones $f(x) = |x| - 3$ y $g(x) = 3 - x^2$ y calcula su área.

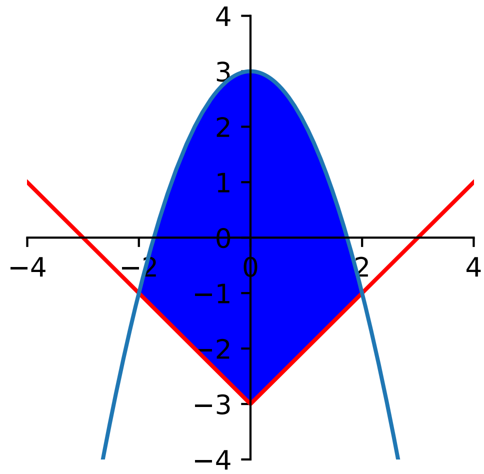
Solución. Empecemos por representar el recinto que nos piden.

- En primer lugar tenemos que tener en cuenta que $f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{for}\, x \leq 0 \\ x-3 & \text{for}\, x > 0 \end{cases}$. Para representarla solo debemos hacer dos tablas de valores a partir de la función definida a trozos anterior.
- Al dibujar el gráfico hemos debido obtener (al menos) los puntos de corte con el eje X de la parábola (función $g(x)$) que son $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{3}, 0\right)$ así como su vértice $(0, 3)$.

  Con los datos anteriores es fácil de hacer y daría



Tenemos que calcular el área de la figura sombreada:



Los puntos de corte de ambas gráficas se hallan a partir de resolver las dos ecuaciones que se obtienen de $f(x) = g(x) \Rightarrow$

$$3 - x^2 - \begin{cases} -x-3 & \text{for}\, x \leq 0 \\ x-3 & \text{for}\, x > 0 \end{cases} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2+x+6=0 & x \leq 0 \\ -x^2-x+6=0 & x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = \{-2, 2\}$$

ya que hay que tener en cuenta que en cada caso una de las posible soluciones debemos descartarla.

Para calcular el área pedida, podemos hacerlo con dos trozos distintos o bien usar la simetría de la figura:

$$\int \left(-x^2 - |x| + 6\right) dx = \begin{cases} \int \left(-x^2+x+6\right) dx & x \leq 0 \\ \int \left(-x^2-x+6\right) dx & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x & \text{for}\, x \leq 0 \\ -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x & \text{for}\, x > 0 \end{cases}$$

$$A = \int_{-2}^{0} (3 - x^2 - (-x-3))\, dx + \int_{0}^{2} (3 - x^2 - (x-3))\, dx = 2 \cdot \int_{0}^{2} (3 - x^2 - (x-3))\, dx =$$

$$= 2 \cdot \int_{0}^{2} (-x^2 - x + 6)\, dx = 2 \cdot \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Bigg]_0^2 = 2 \cdot \frac{22}{3} = \frac{44}{3} \cdot u^2$$

www.picasa.org