Estudio de las asíntotas de una función racional

Ejercicio. Halla las ramas infinitas y las asíntotas de la función: $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x}$

Solución. En el ejercicio, hay que entender (salvo en las asíntotas oblicuas que sí se usa bien) que cuando se escribe ∞ es $+\infty$

Dominio $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x\,(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = \{0,1\} \Rightarrow Dom(f) = (-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$.

Verticales $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x-1}\right) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x-1}\right) = -2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ En $x = 0$ no hay asíntota vertical

$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x}\right) = \infty \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ La recta $x = 1$ es una asíntota vertical

Horizontales $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x}\right) = \infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x}\right) = -\infty \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales

Oblicuas $\left\{\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} \\ n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - m\cdot x) \end{array}\right. \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^3-x^2}\right) = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-x + \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2\cdot(2x+1)}{x-1}\right) = 4 \end{array}\right. \Rightarrow$$

La recta $y = x + 4$ es una asíntota oblicua.
También la podíamos haber obtenido mediante la división:

$$\begin{array}{rl|l} & x^3 + 3x^2 + 2x & x^2 - x \\ \cline{3-3} & -x^3 + x^2 & x + 4 \\ \cline{2-2} & 4x^2 + 2x & \\ & -4x^2 + 4x & \\ \cline{2-2} & 6x & \end{array}$$

la recta $y =$ al cociente de la división anterior es la AO.