Estudio de las asíntotas de una función

Ejercicio. Halla las asíntotas y las ramas infinitas de la función: $f(x) = x^{\frac{|x|}{x}} + \dfrac{1}{x-3}$

Solución. En el ejercicio, hay que entender (salvo en algún caso de las asíntotas oblicuas, cuando el límite cuando $x \to +\infty$ es el mismo que el límite cuando $x \to -\infty$, que sí se usa bien) que cuando se escribe ∞ es $+\infty$

Dominio $Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, \infty)$.

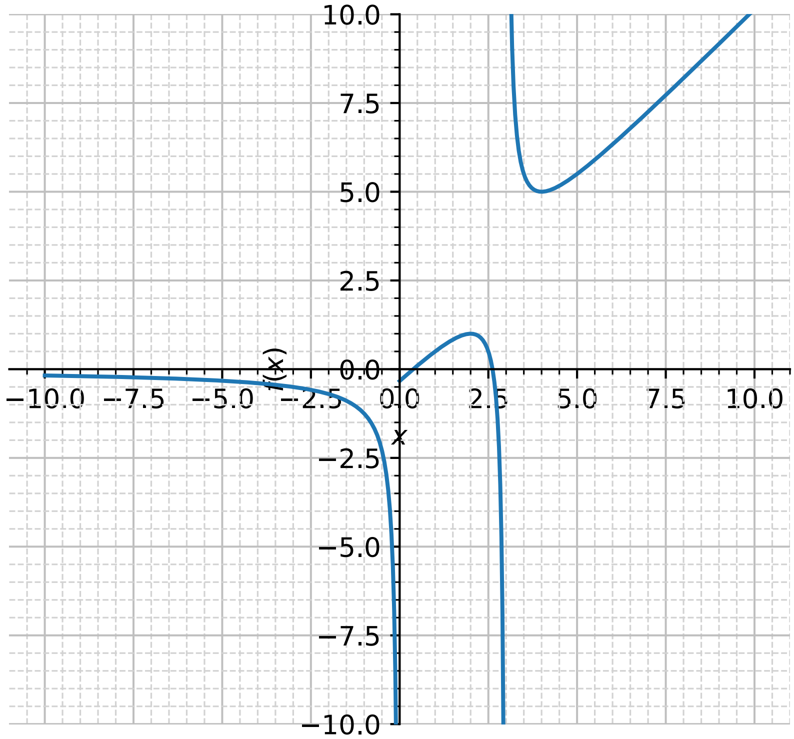
Verticales $\left\{\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 0^-} \left(x^{\frac{|x|}{x}} + \dfrac{1}{x-3}\right) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^{\frac{|x|}{x}} + \dfrac{1}{x-3}\right) & = & -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ La recta $x = 0$ es una asíntota vertical por la izquierda.

$\left\{\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to 3^-} \left(x^{\frac{|x|}{x}} + \dfrac{1}{x-3}\right) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \left(x^{\frac{|x|}{x}} + \dfrac{1}{x-3}\right) & = & \infty \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ La recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

Horizontales $\left\{\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^{\frac{|x|}{x}} + \dfrac{1}{x-3}\right) & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to \infty} \left(x^{\frac{|x|}{x}} + \dfrac{1}{x-3}\right) & = & \infty \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal por la izquierda.

Oblicuas Si procede $\left\{\begin{array}{rl} m = & \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ n = & \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - m\cdot x) \end{array}\right.$ $m, n \in \mathbb{R}$ e $y = m\cdot x + n$

$\left\{\begin{array}{c} m = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^{\frac{|x|}{x}} + \frac{1}{x-3}}{x}\right) = 1 \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} \left(-x + x^{\frac{|x|}{x}} + \dfrac{1}{x-3}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\left(-x + x^{\frac{|x|}{x}}\right)(x-3) + 1}{x-3}\right) = 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ La recta $y = x$ es una asíntota oblicua por la derecha.


10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−5.0
−7.5
−10.0
−10.0 −7.5 −5.0 −2.5 0.0 2.5 5.0 7.5 10.0
f(x)
x