

PRIMER EJERCICIO DE MATRICES PARA LA PREPARACIÓN DE MATEMÁTICAS II PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD

Ejercicio Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ b & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Determina a y b para que $A^2 = 7 \cdot I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
2. Para $a = 1$ y $b = -3$ calcula, si es posible, la matriz X que cumple $A^2 X = B^t$.

Solución

1. Calculemos $A^2 = \begin{pmatrix} a & -2 \\ b & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -2 \\ b & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + (-2)b & a(-2) + (-2)(-1) \\ ba + (-1)b & b(-2) + (-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 - 2b & 2 - 2a \\ ab - b & 1 - 2b \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } A^2 = 7 \cdot I \Rightarrow A^2 - 7 \cdot I = O_{2 \times 2} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 2b & 2 - 2a \\ ab - b & 1 - 2b \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 - 2b & 2 - 2a \\ ab - b & 1 - 2b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2b - 7 & 2 - 2a \\ ab - b & -2b - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - 2b - 7 = 0 \\ 2 - 2a = 0 \\ ab - b = 0 \\ -2b - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

2. De lo obtenido anteriormente sabemos que si $a = 1$ y $b = -3$ entonces $A^2 = 7 \cdot I$. Por tanto $A^2 X = B^t \Leftrightarrow 7 \cdot I \cdot X = B^t \Leftrightarrow 7 \cdot X = B^t \Leftrightarrow X = \frac{1}{7} B^t = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/7 & 2/7 \\ -3/7 & 1/7 & 0 \end{pmatrix}$