Cálculo de derivadas paso a paso

Ejercicio. Calcula la derivada de:

1. $f_1(x) = \sin\left(x^2\right)$
2. $f_2(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$
3. $f_3(x) = \sqrt{x}\ln\left(\cos\left(x\right)\right)$
4. $f_4(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}\right)$

Solución.

- $f_1(x) = \sin\left(x^2\right)$

  1. Sea $u = x^2$.
  2. La derivada del seno es el coseno:

  $$\frac{d}{du}\sin\left(u\right) = \cos\left(u\right)$$

  3. Luego, aplica la regla de la cadena. Multiplicar por $\dfrac{d}{dx}x^2$:

     a. Aplicar la regla de la potencia: x^2 tiene de derivada $2x$

     El resultado de la regla de la cadena es:

  $$2x\cos\left(x^2\right)$$

  La derivada es:

  $$2x\cos\left(x^2\right)$$

- $f_2(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$

  1. Aplicar la regla del cociente, que es:

  $$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)}{g^2(x)}$$

     $f(x) = e^x$ y $g(x) = (x+1)^2$.

     Calculemos $\dfrac{d}{dx}f(x)$:

     a. La derivada de e^x es ella misma.

Calculemos $\frac{d}{dx} g(x)$:

a. Sea $u = x + 1$.

b. Aplicar la regla de la potencia: u^2 tiene de derivada $2u$

c. Luego, aplica la regla de la cadena. Multiplicar por $\frac{d}{dx}(x+1)$:

   I. Derivando $x + 1$ termino a termino:

      1. La derivada de una constante 1 es cero.
      2. Aplicar la regla de la potencia: x tiene de derivada 1

      El resultado es: 1

   El resultado de la regla de la cadena es:

$$2x + 2$$

Ahora aplíquese a la regla del cociente:

$\frac{(x+1)^2 e^x - (2x+2) e^x}{(x+1)^4}$

2. Ahora simplifica:

$$\frac{\left(-2x + (x+1)^2 - 2\right) e^x}{(x+1)^4}$$

La derivada es:

$$\frac{\left(-2x + (x+1)^2 - 2\right) e^x}{(x+1)^4}$$

- $f_3(x) = \sqrt{x} \ln(\cos(x))$

  1. Aplicar la regla del producto:

$$\frac{d}{dx} f(x) g(x) = f(x) \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \frac{d}{dx} f(x)$$

  $f(x) = \sqrt{x}$; para hallar $\frac{d}{dx} f(x)$:

  a. Aplicar la regla de la potencia: $\sqrt{x}$ tiene de derivada $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

  $g(x) = \ln(\cos(x))$; para hallar $\frac{d}{dx} g(x)$:

  a. Sea $u = \cos(x)$.

  b. La derivada de $\ln(u)$ es $\frac{1}{u}$.

  c. Luego, aplica la regla de la cadena. Multiplicar por $\frac{d}{dx} \cos(x)$:

I. La derivada del coseno es el seno negativo:

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

El resultado de la regla de la cadena es:

$$-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

El resultado es: $-\frac{\sqrt{x}\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\ln(\cos(x))}{2\sqrt{x}}$

2. Ahora simplifica:

$$\frac{-x\tan(x) + \frac{\ln(\cos(x))}{2}}{\sqrt{x}}$$

La derivada es:

$$\frac{-x\tan(x) + \frac{\ln(\cos(x))}{2}}{\sqrt{x}}$$

- $f_4(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\right)$

1. Sea $u = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$.
2. La derivada de $\ln(u)$ es $\frac{1}{u}$.
3. Luego, aplica la regla de la cadena. Multiplicar por $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$:

   a. Sea $u = \frac{x+1}{1-x}$.

   b. Aplicar la regla de la potencia: $\sqrt{u}$ tiene de derivada $\frac{1}{2\sqrt{u}}$

   c. Luego, aplica la regla de la cadena. Multiplicar por $\frac{d}{dx}\frac{x+1}{1-x}$:

   I. Aplicar la regla del cociente, que es:

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)}{g^2(x)}$$

$f(x) = x+1$ y $g(x) = 1-x$.

Calculemos $\frac{d}{dx}f(x)$:

1. Derivando $x+1$ termino a termino:

   $\alpha*$ La derivada de una constante 1 es cero.

   $\alpha*$ Aplicar la regla de la potencia: x tiene de derivada 1

   El resultado es: 1

Calculemos $\frac{d}{dx}g(x)$:

1. Derivando $1-x$ termino a termino:

   $\alpha*$ La derivada de una constante 1 es cero.

   $\alpha*$ La derivada de una constante por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función.

   I. Aplicar la regla de la potencia: x tiene de derivada 1

   Entonces, el resultado es: -1

   El resultado es: -1

Ahora aplíquese a la regla del cociente:
$\frac{2}{(1-x)^2}$

El resultado de la regla de la cadena es:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\,(1-x)^2}$$

El resultado de la regla de la cadena es:

$$\frac{(1-x)\,\frac{1}{x+1}}{(1-x)^2}$$

4. Ahora simplifica:

$$-\frac{1}{x^2-1}$$

La derivada es:

$$-\frac{1}{x^2-1}$$

www.picasa.org