Integración por partes de la función $f(x) = x^n \cdot \ln(x^m)$

Ejercicio. Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = x^4 \ln(x^2)$

1. Calcula $\int f(x)\,dx$
2. Encuentra la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,2)$.
3. Si definimos $F(x) = \int_1^x t^4 \ln(t^2)\,dt$, ¿es F derivable en e? justifica la respuesta. Si es que sí, calcula $F'(e)$

Solución.

1. La realizaremos por partes

$$\int x^4 \ln(x^2)\,dx = \left\{ \begin{array}{c} u = \ln(x^2) \Rightarrow du = \frac{2}{x} \cdot dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} \end{array} \right\} =$$

$$\ln(x^2) \cdot \frac{x^5}{5} - \int \frac{2x^4}{5}\,dx =$$

$$= \frac{x^5 \ln(x^2)}{5} - \frac{2x^5}{25} + C$$

2. Calculemos la primitiva solicitada:

$$F(x) = C + \frac{x^5 \ln(x^2)}{5} - \frac{2x^5}{25} \Rightarrow F(1) = C - \frac{2}{25} = 2 \Rightarrow$$

$$C = \frac{52}{25} \Rightarrow F(x) = \frac{x^5 \ln(x^2)}{5} - \frac{2x^5}{25} + \frac{52}{25}$$

3. Sí es derivable ya que $f(t) = t^4 \ln(t^2)$ es continua y por el TFC tenemos que $F'(x) = x^4 \ln(x^2) \Rightarrow F'(e) = 2e^4$