Hallar tres parámetros para que una función sencilla definida a trozos sea continua y derivable

Ejercicio. Halla los valores de a, b y c para que la siguiente función $f(x) = \begin{cases} ax+b+x^2 & \text{for } x \leq 3 \\ cx-3 & \text{otherwise} \end{cases}$ sea derivable en todo su dominio sabiendo que $f(0) = f(-2)$. Representa de forma aproximada la función obtenida.

Solución. Impongamos que $f(0) = f(-2) \Rightarrow b = -2a+b+4 \Rightarrow 2a = 4$

- Continuidad:

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \left(ax+b+x^2\right) = 3a+b+9 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (cx-3) = 3c-3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a+b+9 = 3c-3 \Rightarrow 3a+b-3c = -12$$

- Para que f sea derivable, imponemos que f' sea continua:

$$f'(x) = \begin{cases} a+2x & \text{for } x \leq 3 \\ c & \text{otherwise} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(3^-) = \lim\limits_{x\to 3^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (a+2x) = a+6 \\ f'(3^+) = \lim\limits_{x\to 3^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} c = c \end{array}\right\} \Rightarrow a+6 = c \Rightarrow a-c = -6$$

Con las tres ecuaciones $\begin{cases} 2a & = 4 \\ 3a+b-3c & = -12 \\ a-c & = -6 \end{cases}$ se resuelve el sistema y se obtiene que $\begin{cases} a = & 2 \\ b = & 6 \\ c = & 8 \end{cases}$

- La solución es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x+6 & \text{for } x \leq 3 \\ 8x-3 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Realizaremos una tabla de valores:

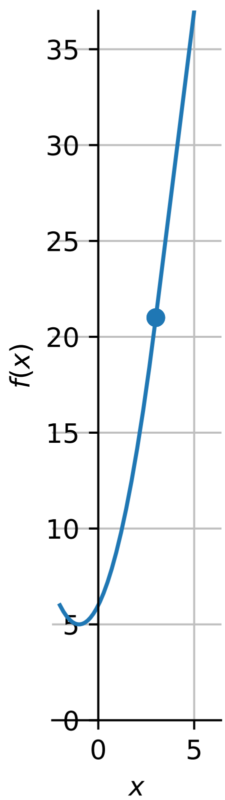
Cuadro 1: Tabla de valores

x	$f(x)$
-2	6

Continúa en la página siguiente

Cuadro 1: Tabla de valores

x	$f(x)$
-1	5
0	6
1	9
2	14
3	21
4	29
5	37



www.picasa.org

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons "Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional".