# Hallar $a$ y $b$ en una función racional tipo sabiendo que tiene asíntota oblicua

**Ejercicio** Considera la función $f(x) = \dfrac{a+x^2}{-b+x}$, para $x \neq b$.

1. Calcula $a$ y $b$ para que la gráfica de $f$ pase por el punto $(4,\,1)$ y tenga a la recta $y = x-5$ como asíntota oblicua.
2. En el caso $a = -7$ y $b = -5$, calcula la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f$ que pasa por el punto de abscisa $x = 1$.

**Solución**

1. Impongamos las dos condiciones que nos dan en el problema a la función:
   - La recta $y = x-5$ es una asíntota oblicua, por tanto:
     - $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{a+x^2}{-bx+x^2}\right) = 1$
     - $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - m\cdot x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{a+x^2}{-b+x} - 1\cdot x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{a+bx}{-b+x}\right) = b$

     de lo anterior obtenemos que $b = -5 \Rightarrow f(x) = \dfrac{a+x^2}{x+5}$
   - La gráfica de $f$ para por el punto $(4,\,1) \Rightarrow f(4) = 1 \Rightarrow \dfrac{a+16}{9} = 1 \Rightarrow a = -7$

     $f(x) = \dfrac{x^2-7}{x+5}$
2. La ecuación de la recta tangente en un punto de abscisa $x = x_0$ es de la forma

   $$(y - f(x_0)) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

   *a*) $x_0 = 1 \Rightarrow f(1) = -1$

   *b*) $f'(x) = \dfrac{(2x)\cdot(x+5) - \left(x^2-7\right)\cdot(1)}{(x+5)^2} = \dfrac{x^2+10x+7}{(x+5)^2} \Rightarrow$

   $f'(1) = \dfrac{1}{2}$

   *c*) Por tanto la ecuación de la recta tangente pedida es:

   $$(y+1) = \frac{1}{2}\cdot(x-1)$$

*d*) La ecuación de la recta normal en un punto de abscisa $x = a$ es de la forma

$$(y - f(x_0)) = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

*e*) Por tanto la ecuación de la recta normal pedida es:

$$(y+1) = \frac{-1}{\frac{1}{2}} \cdot (x - (1)) = -2 \cdot (x - 1)$$

www.picasa.org