Hallar a en un punto para dos rectas que se cortan en el espacio

Ejercicio. La recta $r \equiv \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y+3}{5} = \dfrac{z+1}{3}$ y la recta s, que pasa por los puntos $P\,(8,\ 18,\ 12)$ y $Q\,(0,\ a,\ 4)$ se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.

Solución. Para que se corten en un punto tiene que ocurrir:

1. El vector director de r y el vector director de s no pueden ser proporcionales (no lo vamos a usar)
2. El determinante formado por los vectores directores de ambas rectas y el vector que se obtiene de un punto de r y otro de s tiene que valer 0, de esa forma los tres vectores son linealmente dependientes y las rectas se cortan en un punto.

Impongamos esta segunda condición, para ello primero obtengamos los datos que necesitamos:

Recta r

$\vec{u}_r = (2,\ 5,\ 3)$

$P_r = (-2,\ -3,\ -1)$

Recta s

$\vec{u}_s = (0,\ a,\ 4) - (8,\ 18,\ 12) = (-8,\ a-18,\ -8)$

$P_s = (8,\ 18,\ 12)$

Consideremos el vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (8,\ 18,\ 12) - (-2,\ -3,\ -1) = (10,\ 21,\ 13)$

$$\begin{vmatrix} -8 & a-18 & -8 \\ 2 & 5 & 3 \\ 10 & 21 & 13 \end{vmatrix} = 4a - 24 = 0 \Rightarrow a = 6$$

En consecuencia, el vector director de la recta s es el vector

$$\vec{u}_s = (-8,\ -12,\ -8) \equiv (2,\ 3,\ 2)\ .$$

Para hallar el punto de corte podemos usar varios métodos, lo haremos a partir de la ecuaciones paramétricas que son:

$$r: \begin{cases} x = & 2t-2 \\ y = & 5t-3 \\ z = & 3t-1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = & 2u+8 \\ y = & 3u+18 \\ z = & 2u+12 \end{cases}$$

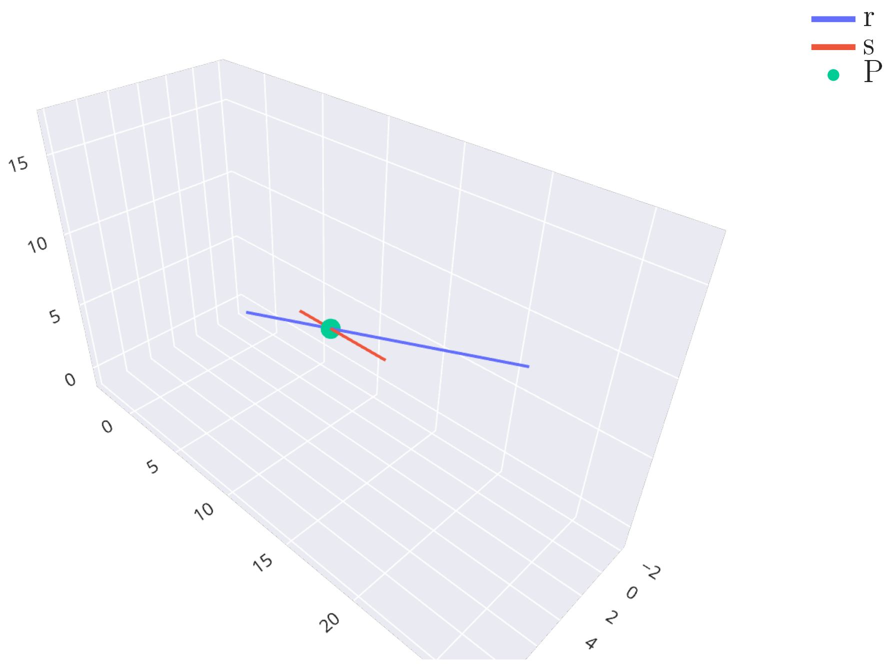
Si igualamos ambas ecuaciones paramétricas obtenemos el sistema (en t y u)

$$\begin{array}{l} 2t-2=2u+8 \\ 5t-3=3u+18 \\ 3t-1=2u+12 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2t-2u-10=0 \\ 5t-3u-21=0 \\ 3t-2u-13=0 \end{array}$$

Si lo resolvemos (ya sabemos que es compatible), por ejemplo por Gauss, tenemos que:
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 10 \\ 5 & -3 & 21 \\ 3 & -2 & 13 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 5 & -3 & 21 \\ 3 & -2 & 13 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 13 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \hookrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
y por tanto tenemos como soluciones: $t=3$ y $u=-2$

En consecuencia, sustituyendo algunos de los dos parámetros anteriores en sus ecuaciones correspondientes, obtenemos que el punto de corte es

$$P=(4,\ 12,\ 8)$$



www.picasa.org