Calcular m para que cuatro puntos estén en un mismo plano, plano mediador y área de un triángulo.

Ejercicio. Sean los puntos $A(1,\ 3,\ 3)$, $B(4,\ 4,\ -2)$, $C(1,\ 0,\ 1)$ y $D(4,\ 7,\ m)$.

1. Calcular m para que A, B, C y D estén en un mismo plano.
2. Determinar la ecuación del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos.
3. Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C.

Solución.

1. Obtengamos los vectores directores del plano que pasa por A, B y C . los vectores directores es mejor simplificarlos dividiéndolos por un factor común, lo mismo se debe hacer con el vector normal que se obtiene después
   $\overrightarrow{AB} = (4,\ 4,\ -2) - (1,\ 3,\ 3) = (3,\ 1,\ -5) \Rightarrow \vec{u} \equiv (3,\ 1,\ -5)$
   $\overrightarrow{AC} = (1,\ 0,\ 1) - (1,\ 3,\ 3) = (0,\ -3,\ -2) \Rightarrow \vec{v} \equiv (0,\ -3,\ -2)$
   Obtengamos los coordenadas del vector que pasa por A y D
   $\vec{w} = \overrightarrow{AD} = (4,\ 7,\ m) - (1,\ 3,\ 3) = (3,\ 4,\ m-3)$
   Si los 4 puntos son coplanarios esos tres vectores tienen que ser linealmente dependientes y en consecuencia el determinante que se obtiene con los tres debe ser igual a cero
   $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & m-3 \end{vmatrix} = -9m = 0 \Rightarrow m = 0$

   Nota También podemos hacerlo obteniendo la ecuación la ecuación general a partir de:

   a) $\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -17x + 6y - 9z + 26 = 0$

   b) O bien obtener un vector normal haciendo el producto vectorial de los dos vectores directores del plano y luego obtener la D imponiendo que la ecuación obtenida pase por uno de los puntos.

   $$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \left(\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \right) = (-17,\ 6,\ -9) \Rightarrow$$

   $$\vec{n}_\pi \equiv (-17,\ 6,\ -9)$$

   $$-17 \cdot x + 6 \cdot y + -9 \cdot z + D = 0 \Rightarrow (-17) \cdot (1) + (6) \cdot (3) + (-9) \cdot (3) + D = 0$$

   $$(-17) + (18) + (-27) + D = 0 \Rightarrow -26 + D = 0 \Rightarrow D = 26$$

   - También podemos obtener de forma directa la ecuación a partir de que $D = \vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{OA} = (-17,\ 6,\ -9) \cdot (1,\ 3,\ 3) = 26$

En cualquier caso, se obtendría que la ecuación del plano ya simplificada es:

$$\pi \equiv -17x+6y-9z+26=0$$

Ahora imponemos que el punto $D(4,\ 7,\ m)$ está en el plano π, es decir

$$-17\cdot 4+6\cdot 7+-9\cdot m+(26)=0 \Rightarrow -9m=0 \Rightarrow$$

$m=0$

2. Ese plano (τ) tiene

   a) Como vector normal el vector $\overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n}_\tau = \vec{u} \equiv (3,\ 1,\ -5)$

   b) Pasa por el punto medio del segmento AB, las coordenadas de ese punto se pueden obtener con: $P=\dfrac{A+B}{2}=\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

   Por tanto:

$$3\cdot x+1\cdot y+-5\cdot z+D=0 \Rightarrow (3)\cdot\left(\frac{5}{2}\right)+(1)\cdot\left(\frac{7}{2}\right)+(-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+D=0$$

$$\Rightarrow \frac{17}{2}+D=0 \Rightarrow D=-\frac{17}{2}$$

   la ecuación del plano ya simplificada es:

$$\tau \equiv 3x+y-5z-\frac{17}{2}=0$$

3. El área pedida se puede obtener con $\acute{A}rea\ =\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}\right)=(-17,\ 6,\ -9) \Rightarrow$$

$$\acute{A}rea\ =\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{|(-17,\ 6,\ -9)|}{2}=\frac{\sqrt{(-17)^2+(6)^2+(-9)^2}}{2}=\frac{\sqrt{406}}{2}=\frac{\sqrt{406}}{2}$$

www.picasa.org