Estudio de un sistema matricial compatible indeterminado y su resolución para un caso particular por Gauss

Ejercicio Considera el sistema $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

1. Determina los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado.
2. Resuelve el sistema, si es posible, para $m = 3$.

Solución

1. Si llamamos $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ el sistema anterior lo podemos escribir de la forma

   $A \cdot X = m \cdot X \Leftrightarrow A \cdot X - m \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - m \cdot I) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y si llamamos

   $$M = A - m \cdot I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m-1 & -1 & 2 \\ 1 & 2-m & -3 \\ 0 & -1 & 1-m \end{pmatrix}$$

   que en forma de sistema lineal homogéneo se puede escribir como:

   $$\begin{cases} x(-m-1) - y + 2z = & 0 \\ x + y(2-m) - 3z = & 0 \\ -y + z(1-m) = & 0 \end{cases}$$

   El sistema anterior será compatible indeterminado $\Leftrightarrow |M| = 0$

   Calculemos

   $$|M| = \begin{vmatrix} -m-1 & -1 & 2 \\ 1 & 2-m & -3 \\ 0 & -1 & 1-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -m-1 & -1 & 2 \\ 1 & 2-m & -3 \\ 0 & -1 & 1-m \\ -m-1 & -1 & 2 \\ 1 & 2-m & -3 \end{vmatrix}$$

   $$= [(-m-1)(2-m)(1-m) + 1(-1)2 + 0(-1)(-3)] -$$

   $$[2(2-m)0 + (-3)(-1)(-m-1) + (1-m)(-1)1]$$

   $$= \left(-m^3 + 2m^2 + m - 4\right) - (-2m-4) = -m^3 + 2m^2 + 3m$$

   por tanto $|M| = 0 \Leftrightarrow -m^3 + 2m^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow m \cdot \left(-m^2 + 2m + 3\right) = 0$

   $m = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$

   $\dfrac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (3)}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \dfrac{-2 \pm 4}{-2} \Rightarrow m = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

   obtenemos que si $m = [-1,\ 0,\ 3]$ nuestro sistema es compatible indeterminado.

2. Para $m=3$ la matriz $M=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -3\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$. Y en forma de sistema lineal homogéneo quedaría

$$\begin{cases}-4x-y+2z= & 0\\ x-y-3z= & 0\\ -y-2z= & 0\end{cases}$$

Del sistema anterior sabemos:

- El rango de su matriz de coeficientes es menor que 3 $\Rightarrow$ el sistema no puede ser compatible y determinado.
- Los sistemas lineales homogéneos son siempre compatibles.

Por tanto, tenemos un sistema compatible indeterminado. Resolvámoslo por Gauss [1].

Escribamos la matriz ampliada, si podemos la simplificamos:

$$\begin{pmatrix}-4 & -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & -3 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\left\{\begin{matrix}F_1 & \leftrightarrows & F_2\\ F_2 & \leftrightarrows & F_1\\ F_3 & \leftrightarrows & F_3\end{matrix}\right\}\longmapsto$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 0\\ -4 & -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\left\{\begin{matrix}F_1 & \leftrightarrows & F_1\\ F_2 & \leftrightarrows & 4F_1+F_2\\ F_3 & \leftrightarrows & F_3\end{matrix}\right\}\longmapsto$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 0\\ 0 & -5 & -10 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\left\{\begin{matrix}F_1 & \leftrightarrows & F_1\\ F_2 & \leftrightarrows & \dfrac{F_2}{5}\\ F_3 & \leftrightarrows & F_3\end{matrix}\right\}\longmapsto$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\left\{\begin{matrix}F_1 & \leftrightarrows & F_1\\ F_2 & \leftrightarrows & -F_2\\ F_3 & \leftrightarrows & F_3\end{matrix}\right\}\longmapsto$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\left\{\begin{matrix}F_1 & \leftrightarrows & F_1\\ F_2 & \leftrightarrows & F_2\\ F_3 & \leftrightarrows & F_2+F_3\end{matrix}\right\}\longmapsto$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema escalonado

$$\begin{cases}x-y-3z= & 0\\ y+2z= & 0\\ 0= & 0\end{cases}$$

se obtiene de solución: $\begin{cases}x= & \tau_0\\ y= & -2\tau_0 \quad \tau_0\in\mathbb{R}\\ z= & \tau_0\end{cases}$

[1] Aunque en la mayoría de los casos la solución se puede obtener de forma inmediata a partir de las ecuaciones de partida.