Calcula:

$$\int_{1}^{3} \frac{x^5+x+1}{x^4+5x^3+8x^2+4x}\,dx$$

Solución

En primer lugar calculemos la integral indefinida

$$\int \frac{x^5+x+1}{x^4+5x^3+8x^2+4x}\,dx$$

para eso tenemos que dividir el numerador entre el denominador

$$\begin{array}{lllllll|l}
x^5 & & & & & +x & +1 & x^4+5x^3+8x^2+4x \\ \cline{8-8}
-x^5 & -5x^4 & -8x^3 & -4x^2 & & & & x-5 \\ \cline{1-4}
 & -5x^4 & -8x^3 & -4x^2 & & +x & & \\
 & 5x^4 & +25x^3 & +40x^2 & +20x & & & \\ \cline{2-6}
 & & 17x^3 & +36x^2 & +21x & +1 & &
\end{array}$$

Como

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{c(x)\cdot q(x)+r(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

tenemos que

$$\frac{x^5+x+1}{x^4+5x^3+8x^2+4x} = x-5+\frac{17x^3+36x^2+21x+1}{x^4+5x^3+8x^2+4x}$$

Por tanto

$$\int \frac{x^5+x+1}{x^4+5x^3+8x^2+4x}\,dx = \int (x-5)\;dx + \int \frac{17x^3+36x^2+21x+1}{x^4+5x^3+8x^2+4x}\,dx$$

- Primera integral:
  $$\int (x-5)\;dx = \frac{x^2}{2}-5x$$
- Segunda integral
  Descompongamos el denominador por Ruffini. Como no tiene término independiente podemos sacar factor común y por tanto:
  $$p(x) = x\cdot(x^3+5x^2+8x+4)$$
  El polinomio que ahora debemos factorizar es:
  $$q(x) = x^3+5x^2+8x+4$$
  Los divisores del término independiente son: $\pm[1,\ 2,\ 4]$
  $$\begin{array}{r|rrrr}
   & 1 & 5 & 8 & 4 \\
  -1 & & -1 & -4 & -4 \\ \hline
   & 1 & 4 & 4 & \color{blue}{0}
  \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 4 & 4 \\ -2 & & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} & 1 & 2 \\ -2 & & -2 \\ \hline & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

El denominador factorizado es $x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 4x = x\,(x+1)\,(x+2)^2$

Para hacer la segunda integral tenemos que descomponerla en fracciones simples:

$$\frac{17x^3 + 36x^2 + 21x + 1}{x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 4x} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{(x+2)^2} + \frac{A_4}{x} \Rightarrow$$

$17x^3+36x^2+21x+1 = A_1 x\,(x+2)^2 + A_2 x\,(x+1)\,(x+2) + A_3 x\,(x+1) + A_4\,(x+1)\,(x+2)^2$

Si le damos a x los valores -2, -1, 0, 1

$-33 = 2A_3$

$-1 = -A_1$

$1 = 4A_4$

$75 = 9A_1 + 6A_2 + 2A_3 + 18A_4$

es fácil obtener que $A_1 = 1, \quad A_2 = 63/4, \quad A_3 = -33/2, \quad A_4 = 1/4$ y por tanto:

$$\frac{17x^3 + 36x^2 + 21x + 1}{x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 4x} = \frac{63}{4\,(x+2)} - \frac{33}{2\,(x+2)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4x}$$

Por último calculemos:

$$\int \frac{17x^3 + 36x^2 + 21x + 1}{x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 4x}\,dx = \int \left(\frac{63}{4\,(x+2)} - \frac{33}{2\,(x+2)^2} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4x}\right) dx =$$

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \left(-\frac{33}{2\,(x+2)^2}\right) dx + \int \frac{1}{4x}\,dx + \int \frac{63}{4\,(x+2)}\,dx$$

y como[1]:

$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(x+1)$

$\int \left(-\frac{33}{2\,(x+2)^2}\right) dx = \frac{33}{2\,(x+2)}$

$\int \frac{1}{4x}\,dx = \frac{\ln(x)}{4}$

$\int \frac{63}{4\,(x+2)}\,dx = \frac{63\ln(4x+8)}{4}$

se obtiene que:

$$\int \frac{17x^3 + 36x^2 + 21x + 1}{x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 4x}\,dx = \frac{\ln(x)}{4} + \ln(x+1) + \frac{63\ln(x+2)}{4} + \frac{33}{2x+4} + C$$

[1] En todas las integrales en las que el resultado sea un ln el argumento debe ir en valor absoluto.

En consecuencia:

$$\int \frac{x^5+x+1}{x^4+5x^3+8x^2+4x}\,dx = \frac{x^2}{2} - 5x + \frac{\ln(x)}{4} + \ln(x+1) + \frac{63\ln(x+2)}{4} + \frac{33}{2x+4} + C$$

- Calculemos la integral definida usando la regla de Barrow: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ siendo F una primitiva cualquiera de f.
  En nuestro caso, una primitiva de f es

  $$F(x) = \frac{x^2}{2} - 5x + \frac{\ln(x)}{4} + \ln(x+1) + \frac{63\ln(x+2)}{4} + \frac{33}{2x+4}$$

  Calculemos
  $F(1) = \ln(2) + 1 + \frac{63\ln(3)}{4}$ y $F(3) = -\frac{36}{5} + \frac{\ln(3)}{4} + \ln(4) + \frac{63\ln(5)}{4}$
  Por tanto:

  $$\int_1^3 \frac{x^5+x+1}{x^4+5x^3+8x^2+4x}\,dx = F(3) - F(1) =$$

  $$-\frac{36}{5} + \frac{\ln(3)}{4} + \ln(4) + \frac{63\ln(5)}{4} - \left(\ln(2) + 1 + \frac{63\ln(3)}{4}\right) =$$

  $$= -\frac{31\ln(3)}{2} - \frac{41}{5} - \ln(2) + \ln(4) + \frac{63\ln(5)}{4} \approx 0{,}8133$$