Intervalo de confianza para la media.

Ejercicio. La longitud de los cables de auriculares que fabrica una empresa es una variable aleatoria que sigue una ley Normal con desviación típica 3,5 cm. Para estimar la longitud media se han medido los cables de una muestra aleatoria de 14 auriculares y se han obtenido las siguientes longitudes, en cm:

205, 196, 202, 204, 197, 194, 196, 201, 203, 200, 202, 198, 201, 200

1. Halla un intervalo de confianza, al 95,0 %, para la longitud media de los cables.
2. Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estos cables para que el error de estimación de la longitud media sea inferior a 0,75 cm, con un nivel de confianza del 90,0 %.

Solución.
Tenemos los datos: $\sigma = 3{,}5$ y $n = 14$

1. Calculamos la media a partir de los datos que nos facilitan y sale $\bar{X} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{2799}{14} = 199{,}929$

   $1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{0{,}05}{2} = 0{,}025 \Rightarrow 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0{,}025 = 0{,}975 \Rightarrow P(Z < z_{0{,}975}) = 0{,}975 \Rightarrow z_{0{,}975} \simeq 1{,}96$

   $E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{3{,}5}{\sqrt{14}} = 1{,}833$

   Por tanto el intervalo pedido es de la forma:

   $$(\bar{X}-E, \bar{X}+E) = (199{,}929-1{,}833, 199{,}929+1{,}833) = (198{,}096,\ 201{,}762)$$

2. $1-\alpha = 0{,}9 \Rightarrow \alpha = 0{,}1 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{0{,}1}{2} = 0{,}05 \Rightarrow 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0{,}05 = 0{,}95 \Rightarrow P(Z < z_{0{,}95}) = 0{,}95 \Rightarrow z_{0{,}95} \simeq 1{,}645$

   $E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \dfrac{3{,}5}{\sqrt{n}} < 0{,}75 \Rightarrow \sqrt{n} > \dfrac{1{,}645 \cdot 3{,}5}{0{,}75} = 7{,}677 \Rightarrow n > 7{,}677^2 = 58{,}936 \Rightarrow$ $n = 59$ auriculares.

Intervalo de confianza para la proporción.

Ejercicio. Se desea estimar la proporción de votantes a un determinado partido político mediante una muestra aleatoria.

1. Si de una muestra de 600 personas 150 dicen que lo votan, calcule con un nivel de confianza del 99,0 % un intervalo para la proporción de votantes a ese partido en la población.
2. Si la proporción de votantes en otra muestra ha sido 0,3 y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0,05, con un nivel de confianza del 95,0 %, calcule el tamaño mínimo de dicha muestra.

Solución. Del enunciado se puede deducir que nos indican que, en ambos apartados, debemos tomar $p = \hat{p}$ y $q = \hat{q}$, aunque también es correcto con $p = q = 0{,}5$

1. Tenemos los datos:

   $n = 600 \Rightarrow \hat{p} = \dfrac{150}{600} = 0{,}25 \Rightarrow \hat{q} = 1-\hat{p} = 1-0{,}25 = 0{,}75$

   Como p es desconocido opto por tomar $p = \hat{p} = 0{,}25$ y $q = \hat{q} = 0{,}75$

   $1-\alpha = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{0{,}01}{2} = 0{,}005 \Rightarrow 1-\dfrac{\alpha}{2} = 1-0{,}005 = 0{,}995 \Rightarrow P(Z < z_{0{,}995}) = 0{,}995 \Rightarrow z_{0{,}995} \simeq 2{,}5758$

   $E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}} = 2{,}5758 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{600}} = 0{,}0455$

   Por tanto el intervalo pedido es de la forma:

   $$(\hat{p}-E, \hat{p}+E) = (0{,}25-0{,}0455, 0{,}25+0{,}0455) = (0{,}2045,\ 0{,}2955)$$

   Que en % es (20,45, 29,55)

2. Como p es desconocido opto por tomar $p = \hat{p} = 0{,}3$ y $q = \hat{q} = 0{,}7$

   $1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{0{,}05}{2} = 0{,}025 \Rightarrow 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}025 = 0{,}975 \Rightarrow P(Z < z_{0{,}975}) = 0{,}975 \Rightarrow z_{0{,}975} \simeq 1{,}96$

   $E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}} \Rightarrow \sqrt{n} > \dfrac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{p \cdot q}}{E} = \dfrac{1{,}96 \cdot \sqrt{0{,}3 \cdot 0{,}7}}{0{,}05} = 17{,}9637 \Rightarrow n > 322{,}6945 \Rightarrow n = 323$