Estudio de la monotonía de una función racional y cálculo de la recta tangente en un punto

Ejercicio. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$

1. Estudia la monotonía de la función f.
2. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución.

1. **Dominio** $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \{1\} \Rightarrow Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

   La derivada de la función es

   $$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}x^3 \cdot (x^2 - 2x + 1) - (x^3) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 - 2x + 1)^2} =$$

   $$= \frac{(3x^2) \cdot (x^2 - 2x + 1) - (x^3) \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

   $$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = \{0, 3\}$$

   Tabla de monotonía

Intervalos	$]-\infty, 0[$	$]0, 1[$	$]1, 3[$	$]3, +\infty[$
S(f')	+	+	-	+
Monotonía	Creciente	Creciente	Decreciente	Creciente

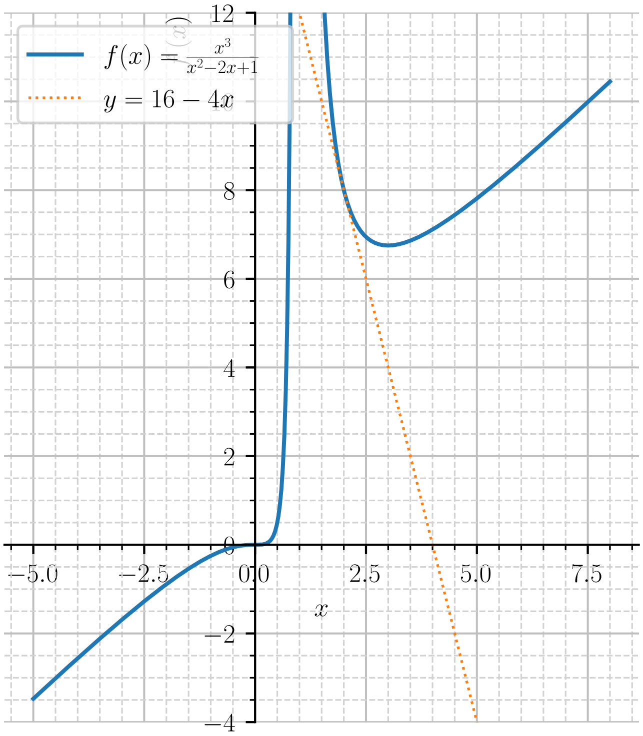
   De la tabla anterior podemos deducir que

Extremos de la función
Mínimo en $(3, f(3)) = \left(3, \dfrac{27}{4}\right) \approx (3{,}0,\ 6{,}75)$

2. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

   Por el apartado anterior sabemos la derivada de f. Tenemos que calcular:

   $$\left.\begin{array}{r} f(2) = 8 \\ f'(2) = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la recta pedida es de la forma } (y - (8)) = -4 \cdot (x - 2)$$



www.picasa.org