Hallar X en una ecuación matricial e inversa matriz 3x3 por determinantes

Dada una matriz cuadrada $A=\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, la matriz adjunta da A es otra matriz que resulta de sustituir cada elemento por su adjunto.

$$\text{Adj(A)=}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{1,0} & a_{1,2} \\ a_{2,0} & a_{2,2} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} \\ a_{2,0} & a_{2,1} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,2} \\ a_{2,0} & a_{2,2} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{2,0} & a_{2,1} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{1,1} & a_{1,2} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,2} \\ a_{1,0} & a_{1,2} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Si $|A|\neq 0 \Rightarrow A^{-1}=\dfrac{(Adj(A))^T}{|A|}=\dfrac{Adj(A^T)}{|A|}$

Ejercicio

1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & m-5 & -3 \\ -3 & m-1 & m+1 \end{pmatrix}$ determina el valor de m para el que la matriz A no tiene inversa.
2. Para $m=2$ resuelve la ecuación $AXB=C^T$ siendo $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solución

1. Calculemos

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & m-5 & -3 \\ -3 & m-1 & m+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & m-5 & -3 \\ -3 & m-1 & m+1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & m-5 & -3 \end{matrix}$$

$$=[1\,(m-5)\,(m+1)+3\,(m-1)\,3+(-3)\,3\,(-3)]-$$

$$[3\,(m-5)\,(-3)+(-3)\,(m-1)\,1+(m+1)\,3\cdot 3]$$

$$=\left(m^2+5m+13\right)-(57-3m)=m^2+8m-44$$

por tanto $|A|=0 \Leftrightarrow m^2+8m-44=0 \Leftrightarrow$

$$m=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=$$

$$\frac{-8\pm\sqrt{(8)^2-4\cdot(1)\cdot(-44)}}{2\cdot(1)}=\frac{-8\pm\sqrt{240}}{2}=\frac{-8\pm4\sqrt{15}}{2}\Rightarrow m=\begin{cases} -4+2\sqrt{15} \\ -2\sqrt{15}-4 \end{cases}$$

obtenemos que si $m=\left\{\left(-4+2\sqrt{15},\right),\left(-2\sqrt{15}-4,\right)\right\}$ la matriz A no tiene inversa.

2. $AXB = C^T \Leftrightarrow X = A^{-1}C^TB^{-1}$ en consecuencia tenemos que ver que existen y hallar A^{-1}y B^{-1}

   Para $m = 2$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y por lo que hemos obtenido anteriormente sabemos que tiene inversa. Además, podemos calcular su determinante de dos formas:

   a) Sustituyendo $m = 2$ en el determinante obtenido en el apartado anterior $(m^2 + 8m - 44)$ y obtenemos que $|A| = -24$

   b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
   $\begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \end{matrix}$

$$= [1\,(-3)\,3 + 3\cdot 1\cdot 3 + (-3)\,3\,(-3)] -$$
$$[3\,(-3)\,(-3) + (-3)\,1\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 3]$$
$$= (27) - (51) = -24$$

La adjunta de la matriz A es

$$\text{Adj(A)} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 \\ -6 & 12 & -10 \\ 0 & 12 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(Adj(A))^T = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 0 & 12 & 12 \\ -6 & -10 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-24}\cdot\begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 0 & 12 & 12 \\ -6 & -10 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 5/12 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= [0^2] -$$
$$[(-1)^2]$$
$$= (0) - (1) = -1$$

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(Adj(B))^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por último $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

En consecuencia $X = \left(-\frac{1}{24}\right)\begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 0 & 12 & 12 \\ -6 & -10 & -12 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -6 & -6 & 0 \\ 0 & 12 & 12 \\ -6 & -10 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-6)\,1+(-6)\,3+0\cdot 1 & (-6)\,0+(-6)\,1+0\cdot 3 \\ 0\cdot 1+12\cdot 3+12\cdot 1 & 0^2+12\cdot 1+12\cdot 3 \\ (-6)\,1+(-10)\,3+(-12)\,1 & (-6)\,0+(-10)\,1+(-12)\,3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -24 & -6 \\ 48 & 48 \\ -48 & -46 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -24 & -6 \\ 48 & 48 \\ -48 & -46 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-24)\,0+(-6)\,(-1) & (-24)\,(-1)+(-6)\,0 \\ 48\cdot 0+48\,(-1) & 48\,(-1)+48\cdot 0 \\ (-48)\,0+(-46)\,(-1) & (-48)\,(-1)+(-46)\,0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 24 \\ -48 & -48 \\ 46 & 48 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} 6 & 24 \\ -48 & -48 \\ 46 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1 \\ 2 & 2 \\ -23/12 & -2 \end{pmatrix}$$