Problema de programación lineal a partir de inecuaciones

Ejercicio

1. Representa el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices:

$$2x+3y-11\geq 0,\quad -4x+y+15\geq 0,\quad -x-3y+20\geq 0,\quad -3x+y\leq 0$$

2. Halla los puntos de esta región donde la función $F(x,y)=2x+3y$ alcanza los valores máximo y mínimo, calculando dichos valores.

Solución Inicialmente consideremos las inecuaciones del enunciado como ecuaciones/rectas del plano:

$$r_1: 2x+3y-11=0$$
$$r_2: -4x+y+15=0$$
$$r_3: -x-3y+20=0$$
$$r_4: -3x+y=0$$

Si despejamos la y en cada inecuación obtenemos las ecuaciones:

$$r_1: y=\frac{11}{3}-\frac{2x}{3}$$
$$r_2: y=4x-15$$
$$r_3: y=\frac{20}{3}-\frac{x}{3}$$
$$r_4: y=3x$$

y podemos obtener las las tablas de valores:

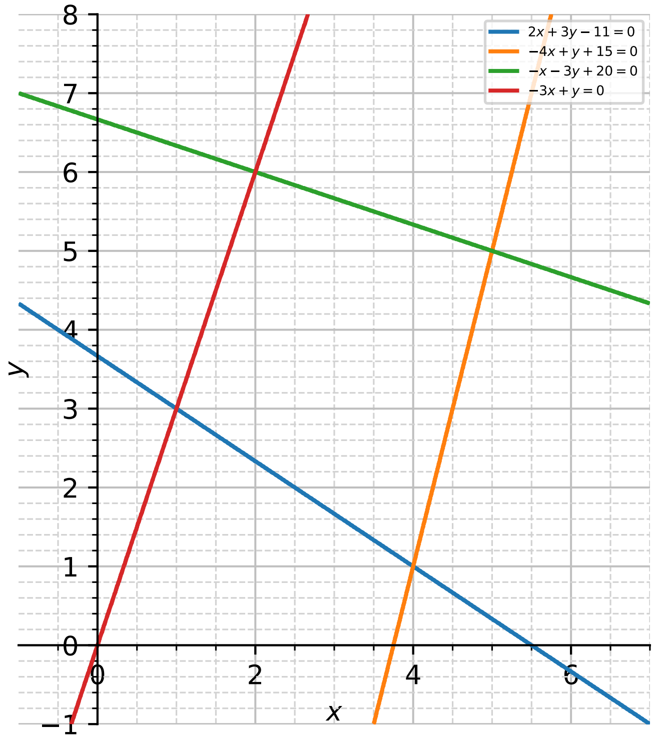
x	$y=\frac{11}{3}-\frac{2x}{3}$
-1	$13/3$
0	$11/3$
1	3
2	$7/3$
3	$5/3$

x	$y=4x-15$
-1	-19
0	-15
1	-11
2	-7
3	-3

x	$y=\frac{20}{3}-\frac{x}{3}$
-1	7
0	$20/3$
1	$19/3$
2	6
3	$17/3$

x	$y=3x$
-1	-3
0	0
1	3
2	6
3	9

Si las dibujamos en unos ejes de coordenadas obtenemos:



Hay que ver que región del plano nos quedamos a partir de un punto que no pertenezca a la recta. Si sustituimos en cada inecuación el punto que se muestra, obtenemos:

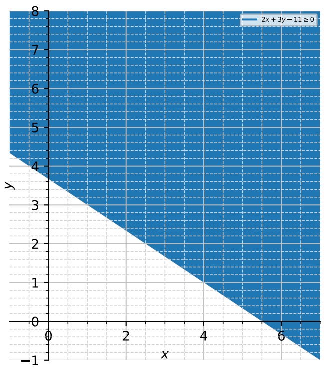
Inecuación 0 Sustituimos el punto $(0,\ 0)$ en la inecuación $2x+3y-11 \geq 0$ y se obtiene que es False

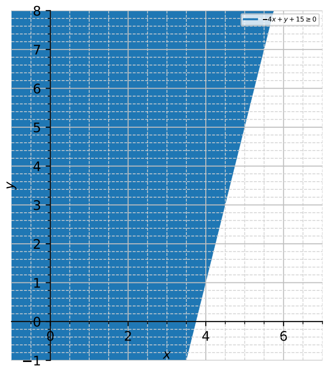
Inecuación 1 Sustituimos el punto $(0,\ 0)$ en la inecuación $-4x+y+15 \geq 0$ y se obtiene que es True

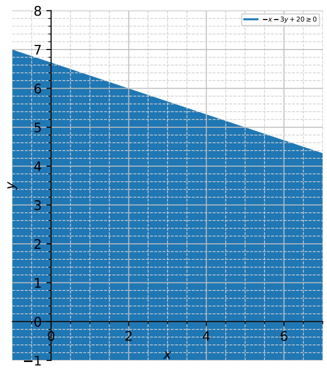
Inecuación 2 Sustituimos el punto $(0,\ 0)$ en la inecuación $-x-3y+20 \geq 0$ y se obtiene que es True

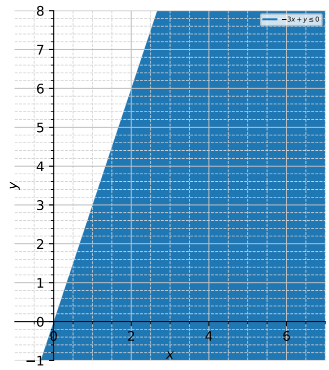
Inecuación 3 Sustituimos el punto $\left(\frac{55}{18},\ \frac{133}{36}\right)$ en la inecuación $-3x+y \leq 0$ y se obtiene que es True

Es decir, cada inecuación tiene de solución:

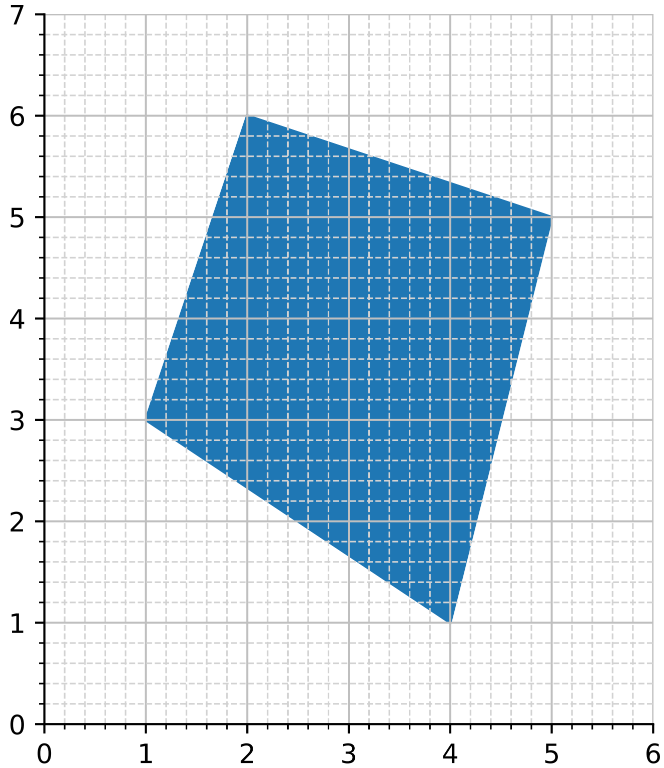








La región factible quedaría:



Si resolvemos los sistemas por igualación, obtenemos los vértices:

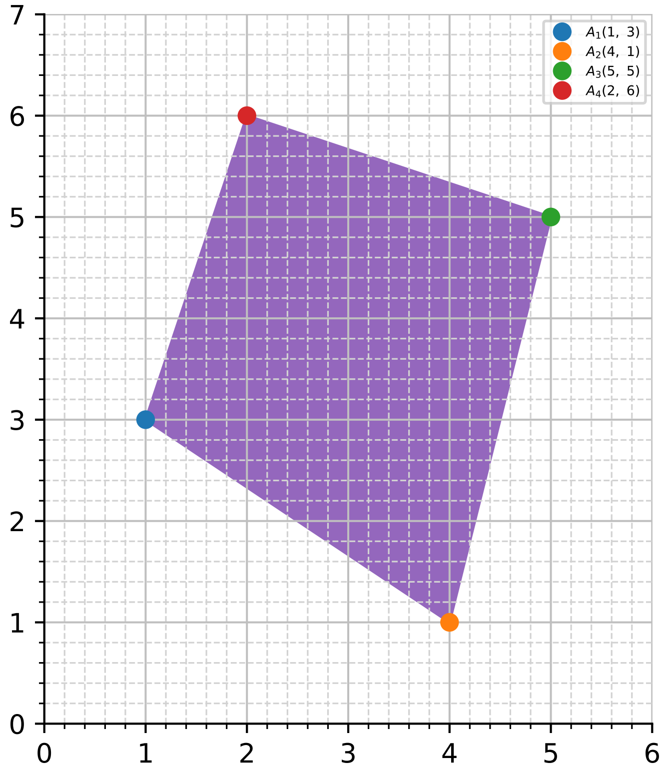
$$\left.\begin{array}{r} y = \dfrac{11}{3} - \dfrac{2x}{3} \\ y = 3x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{11}{3} - \frac{2x}{3} = 3x \Rightarrow \frac{11}{3} - \frac{11x}{3} = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A_1 = (1,3)$$

$$\left.\begin{array}{r} y = \dfrac{11}{3} - \dfrac{2x}{3} \\ y = 4x - 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{11}{3} - \frac{2x}{3} = 4x - 15 \Rightarrow \frac{56}{3} - \frac{14x}{3} = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A_2 = (4,1)$$

$$\left.\begin{array}{r} y = 4x - 15 \\ y = \dfrac{20}{3} - \dfrac{x}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 4x - 15 = \frac{20}{3} - \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{13x}{3} - \frac{65}{3} = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A_3 = (5,5)$$

$$\left.\begin{array}{r} y = \dfrac{20}{3} - \dfrac{x}{3} \\ y = 3x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{20}{3} - \frac{x}{3} = 3x \Rightarrow \frac{20}{3} - \frac{10x}{3} = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow A_4 = (2,6)$$

y por tanto nos queda



Evaluación en los puntos de la función objetivo $F(x,y) = 2x+3y$:

$$\begin{aligned} F(A_1) &= F(1,\ 3) = 11 \\ F(A_2) &= F(4,\ 1) = 11 \\ F(A_3) &= F(5,\ 5) = 25 \\ F(A_4) &= F(2,\ 6) = 22 \end{aligned}$$

Por tanto, en todos los puntos del segmento de extremos $A_1 = (1,\ 3)$ y $A_2 = (4,\ 1)$ se obtiene el mínimo y en el punto $A_3 = (5,\ 5)$ se obtiene el máximo .