

Ejercicio sobre rango de matrices y resolución de sistema lineal homogéneo

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se define la matriz $M = A + (\lambda - 1) \cdot B$

1. Halla los valores λ de para los que la matriz M tiene rango menor que 3.
2. Para $\lambda = -1$, resuelve el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es M .

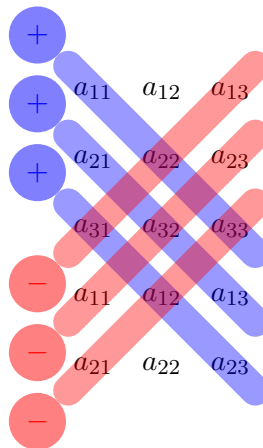
Solución

1. Calculemos M

$$M = A + (\lambda - 1) \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + (\lambda - 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda - 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ \lambda - 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & \lambda - 4 \\ 0 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Regla de Sarrus: las diagonales azules se suman y las diagonales rojas se restan.



$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

y su determinante:

$$|M| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & \lambda - 4 \\ 0 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Si añadimos las dos primeras filas debajo y aplicamos la regla de Sarrus

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & \lambda - 4 \\ 0 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda - 4 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= [4\lambda 0 + 0(-1)(\lambda - 4) + \lambda(-1)(-1)] - [(\lambda - 4)\lambda\lambda + (-1)(-1)4 + 0(-1)0]$$

$$= (\lambda) - (\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4$$

Factorizamos por Ruffini, los divisores del término independiente son:

$$\pm \{1, 2, 4\}$$

$$-1 \left| \begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & -4 \\ & 1 & -5 & 4 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \end{array} \right|$$

$$1 \left| \begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & -4 \\ & -1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{array} \right|$$

$$4 \left| \begin{array}{cc|c} -1 & 4 \\ & -4 \\ -1 & 0 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow |M| = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4 = -(\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Por tanto, para $\lambda = \{-1, 1, 4\}$ tenemos que $|M| = 0 \Rightarrow$ para esos valores $\text{rango}(M) < 3$

2. Para $\lambda = -1$ la matriz $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Y en forma de sistema lineal homogéneo quedaría

$$\begin{cases} 4x - y - 5z = 0 \\ -y - z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

Del sistema anterior sabemos:

- El rango de su matriz de coeficientes es menor que 3 $\Rightarrow$ el sistema no puede ser compatible y determinado.
- Los sistemas lineales homogéneos son siempre compatibles.

Por tanto, tenemos un sistema compatible indeterminado. Resolvámoslo por Gauss ¹.

Escribamos la matriz ampliada, si podemos la simplificamos:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} F_1 \Leftrightarrow F_3 \\ F_2 \Leftrightarrow F_2 \\ F_3 \Leftrightarrow F_1 \end{cases} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} F_1 \Leftrightarrow -F_1 \\ F_2 \Leftrightarrow F_2 \\ F_3 \Leftrightarrow F_3 \end{cases} \mapsto$$

¹Aunque en la mayoría de los casos la solución se puede obtener de forma inmediata a partir de las ecuaciones de partida.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} F_1 \Leftrightarrow F_1 \\ F_2 \Leftrightarrow F_2 \\ F_3 \Leftrightarrow -4F_1 + F_3 \end{array} \right\} \mapsto \\
& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} F_1 \Leftrightarrow F_1 \\ F_2 \Leftrightarrow F_2 \\ F_3 \Leftrightarrow \frac{F_3}{5} \end{array} \right\} \mapsto \\
& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} F_1 \Leftrightarrow F_1 \\ F_2 \Leftrightarrow -F_2 \\ F_3 \Leftrightarrow F_3 \end{array} \right\} \mapsto \\
& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} F_1 \Leftrightarrow F_1 \\ F_2 \Leftrightarrow F_2 \\ F_3 \Leftrightarrow F_2 + F_3 \end{array} \right\} \mapsto \\
& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema escalonado

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

se obtiene de solución:
$$\begin{cases} x = \tau_0 \\ y = -\tau_0 \\ z = \tau_0 \end{cases} \quad \tau_0 \in \mathbb{R}$$