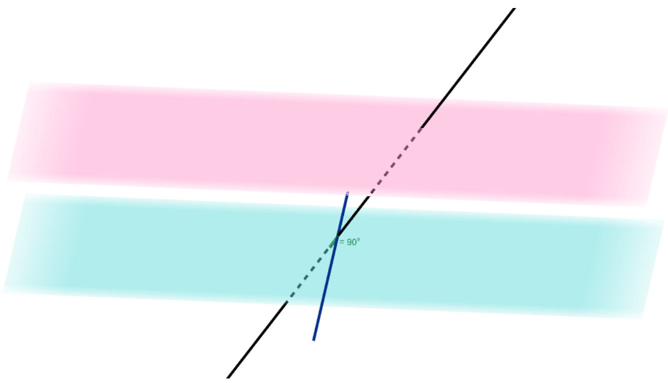
Una recta paralela a un plano y perpendicular a otra en el espacio.

Ejercicio Calcular alguna recta que sea paralela al plano de ecuación $\pi \equiv 33x - 9y - 12z - 87 = 0$ y corte perpendicularmente a la recta $s \equiv \begin{cases} y - 5 & = 0 \\ 3x + 4z - 8 & = 0 \end{cases}$.

Solución

Se puede resolver de varias formas. Optaré por una que se basa en tener en cuenta que nuestra recta r:

1. Está contenida en el plano paralelo al plano π de ecuación $\pi_0 \equiv 33x - 9y - 12z = 0$, es decir, está contenida en el plano paralelo a π que pasa por el origen de coordenadas. De esa forma me garantizo que $r \Big| \Big| \pi$
2. $r \in \pi_0 \Rightarrow$ el vector normal al plano π_0 ($\vec{n}_\pi$) que es el mismo que el vector normal al plano π (por ser paralelos) es perpendicular al vector director de la recta r ($\vec{u}_r$)
3. Como $r \perp s \Rightarrow \vec{u}_r \perp \vec{u}_s$
4. De las dos cuestiones anteriores podemos deducir que $\vec{u}_r = \vec{u}_s \times \vec{n}_\pi$
5. Sea P el punto de intersección de las rectas r y $s \Rightarrow \begin{cases} P & \in r \\ P & \in s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P & \in \pi_0 \\ P & \in s \end{cases} \Rightarrow P$ es el punto de corte de la recta s y el plano π_0, es decir, es la solución del sistema determinado por las ecuaciones del plano y la recta anteriores .



A partir de lo anterior, calculemos[1]:

1. Normal al plano π es $\vec{n}_\pi \equiv (33,\ -9,\ -12) \equiv (11,\ -3,\ -4)$
2. Director de la recta s, lo podemos obtener de varias formas, por ejemplo:
   - Introduciendo parámetros en la ecuación de la recta s y, si es posible, simplificando los vectores directores, tenemos que:

$$s \equiv \begin{cases} y - 5 & = 0 \\ 3x + 4z - 8 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = & 8u - 4 \\ y & = & 5 \\ z & = & 5 - 6u \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_s \equiv (8,\ 0,\ -6) \equiv (4,\ 0,\ -3)$$

[1] En todos los casos, si se puede se simplifican los vectores directores/normales dividiendo por el *mcd* de sus coordenadas.

- También lo podemos obtener a partir del producto vectorial de los vectores normales a los planos que determinan la recta s

$$s \equiv \begin{cases} y-5 & =0 \\ 3x+4z-8 & =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 & = & (0,\ 1,\ 0) \\ \vec{n}_2 & = & (3,\ 0,\ 4) \end{cases}$$

$$\vec{u}_s \equiv \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (4,\ 0,\ -3)$$

3. Vector director de la recta r

$$\vec{u}_r = \vec{u}_s \times \vec{n}_\pi = \left(\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 11 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 11 & -3 \end{vmatrix} \right) = (-54,\ -102,\ -72) \equiv (-9,\ -17,\ -12)$$

4. Punto P intersección de ambas rectas. Podemos obtenerlo de varias formas, dos de ellas son:

- Si hemos optado por hallar las ecuaciones paramétricas de s podemos hallar el punto P a partir de ellas y de la ecuación del plano $\pi_o \equiv 33x - 9y - 12z = 0$:

$$(33)\cdot(8u-4) + (-9)\cdot(5) + (-12)\cdot(5-6u) = 0$$
$$\Rightarrow 336u - 237 = 0 \Rightarrow u = \frac{79}{112}$$

el punto P de intersección se obtiene sustituyendo el valor anterior del parámetro en la ecuación de la recta s.

$$P \begin{cases} x & = & -4 + 8 \cdot \dfrac{79}{112} \\ y & = & 5 \\ z & = & 5 - 6 \cdot \dfrac{79}{112} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = & \dfrac{23}{14} \\ y & = & 5 \\ z & = & \dfrac{43}{56} \end{cases}$$

- Resolvemos el sistema para hallar el punto de intersección de la recta s y el plano π_o

$$\begin{cases} y-5 & =0 \\ 3x+4z-8 & =0 \\ 33x-9y-12z & =0 \end{cases}$$

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 33 & -9 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 33 & -9 & -12 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 33 & -9 & -12 \end{vmatrix} \\ \color{cyan}{0 \quad 1 \quad 0} \\ \color{cyan}{3 \quad 0 \quad 4} \end{matrix}$$

$$= [0\cdot 0\,(-12) + 3\,(-9)\,0 + 33\cdot 1\cdot 4] - [0\cdot 0\cdot 33 + 4\,(-9)\,0 + (-12)\,1\cdot 3]$$
$$= (132) - (-36) = 168$$

Como $|A| \neq 0 \Rightarrow Rango(A) = Rango(A^*) = 3$ tenemos un SCD (tiene una sola solución). Si hallamos la solución por Cramer:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & -12 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & -12 \end{vmatrix} \\ \color{cyan}{5 \quad 1 \quad 0} \\ \color{cyan}{8 \quad 0 \quad 4} \end{matrix}$$

$$= [5\cdot 0\,(-12) + 8\,(-9)\,0 + 0\cdot 1\cdot 4] - [0\cdot 0\cdot 0 + 4\,(-9)\,5 + (-12)\,1\cdot 8]$$

$$= (0) - (-276) = 276$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & -12 \end{vmatrix}}{168} = \frac{276}{168} = \frac{23}{14}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 4 \\ 33 & 0 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 4 \\ 33 & 0 & -12 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 4 \end{matrix}$$

$$= [0 \cdot 8\,(-12) + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 33 \cdot 5 \cdot 4] - [0 \cdot 8 \cdot 33 + 4 \cdot 0 \cdot 0 + (-12)\,5 \cdot 3]$$

$$= (660) - (-180) = 840$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 3 & 8 & 4 \\ 33 & 0 & -12 \end{vmatrix}}{168} = \frac{840}{168} = 5$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 33 & -9 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 33 & -9 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \end{matrix}$$

$$= [0 \cdot 0 \cdot 0 + 3\,(-9)\,5 + 33 \cdot 1 \cdot 8] - [5 \cdot 0 \cdot 33 + 8\,(-9)\,0 + 0 \cdot 1 \cdot 3]$$

$$= (129) - (0) = 129$$

$$\Rightarrow z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 33 & -9 & 0 \end{vmatrix}}{168} = \frac{129}{168} = \frac{43}{56}$$

En cualquier caso:

$$P \begin{cases} x = & \dfrac{23}{14} \\ y = & 5 \\ z = & \dfrac{43}{56} \end{cases}$$

Finalmente, a partir del punto $P\left(\frac{23}{14},\ 5,\ \frac{43}{56}\right)$ y el vector director $\vec{u}_r\,(-9,\ -17,\ -12)$ tenemos la ecuación paramétrica de la recta r es

$$r \equiv \begin{cases} x = & \dfrac{23}{14} - 9t \\ y = & 5 - 17t \\ z = & \dfrac{43}{56} - 12t \end{cases} \quad , \ t \in \mathbb{R}$$