RECTAS QUE SE CRUZAN EN EL ESPACIO Y RECTA PERPENDICULAR A AMBAS A PARTIR DE PUNTOS GENÉRICOS

Ejercicio. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ z-1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x &=& 2t \\ y &=& 4t-5 \\ z &=& 2t-4 \end{cases}$

1. Determina su posición relativa.
2. Halla los puntos de corte de la recta perpendicular a ambas rectas.
3. Determina, en forma vectorial, la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas rectas.
4. A partir del apartado 2, halla la distancia entre ambas.
5. Comprueba que el resultado anterior coincide con el que se obtiene haciendo uso de la fórmula para clacular la distancia entre dos rectas que se cruzan mediante el producto vectorial y el producto mixto.

Solución.

1. Introduciendo parámetros en la ecuación de la recta r y, si es posible, simplificando los vectores directores, tenemos que:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &=& 2-u \\ y &=& u-3 \\ z &=& 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r & (2,\ -3,\ 1) \\ \vec{u}_r & (-1,\ 1,\ 0) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x &=& 2t \\ y &=& 4t-5 \\ z &=& 2t-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_s & (0,\ -5,\ -4) \\ \vec{u}_s & (1,\ 2,\ 1) \end{cases}$$

Nuestras rectas se cruzan ya que:

- Ambos vectores no son proporcionales
- Si calculamos el vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (0,\ -5,\ -4) - (2,\ -3,\ 1) = (-2,\ -2,\ -5)$ el rango de la matriz
$$rango \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix} = 3 \text{ ya que } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 11$$

2. Hallamos un punto genérico P_g de la recta r (que dependerá de su parámetro, por ejemplo, u).

Como la ecuación paramétrica de la recta r es $\begin{cases} x &=& 2-u \\ y &=& u-3 \\ z &=& 1 \end{cases}$ obtenemos:

$$P_g = (2-u,\ u-3,\ 1)$$

Hallamos otro punto Q_g genérico de la recta s (dependerá de otro parámetro t).

$$Q_g = (2t,\ 4t-5,\ 2t-4)$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{P_gQ_g}$, que dependerá de dos parámetros.

$$\overrightarrow{P_gQ_g} = (2t,\ 4t-5,\ 2t-4) - (2-u,\ u-3,\ 1) = (2t+u-2,\ 4t-u-2,\ 2t-5)$$

Imponemos que el vector anterior sea perpendicular a los vectores directores de las rectas r y s, y por lo tanto, los productos escalares que siguen deben dar cero.

$$\vec{u}_r \cdot \overrightarrow{P_gQ_g} = (-1,\ 1,\ 0) \cdot (2t+u-2,\ 4t-u-2,\ 2t-5) = 2t-2u = 0$$
$$\vec{u}_s \cdot \overrightarrow{P_gQ_g} = (1,\ 2,\ 1) \cdot (2t+u-2,\ 4t-u-2,\ 2t-5) = 12t-u-11 = 0$$

Nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, si resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 2t-2u & = 0 \\ 12t-u-11 & = 0 \end{cases}$$

obtenemos que $u = 1$ y $t = 1$. Sustituyendo esos valores en las ecuaciones paramétricas obtenemos que los puntos $P_r\,(1,\ -2,\ 1)$ y $Q_s\,(2,\ -1,\ -2)$ están sobre la perpendicular.

3. La perpendicular común es la recta que pasa por $P_r\,(1,\ -2,\ 1)$ y $Q_s\,(2,\ -1,\ -2)$. Si calculamos

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (2,\ -1,\ -2) - (1,\ -2,\ 1) = (1,\ 1,\ -3)$$

la ecuación pedida en forma vectorial es:

$$(x,y,z) = (1,\ -2,\ 1) + \alpha \cdot (1,\ 1,\ -3)$$

4. Por último, la distancia entre las dos rectas que se cruzan es la distancia entre P_r y Q_s

$$d(r,s) = |\overrightarrow{P_rQ_s}| = \sqrt{(1)^2+(1)^2+(-3)^2} = \sqrt{11}$$

5. Sea P_r un punto cualquiera de la recta r y P_s cualquiera un punto de la recta s, entonces:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|}$$

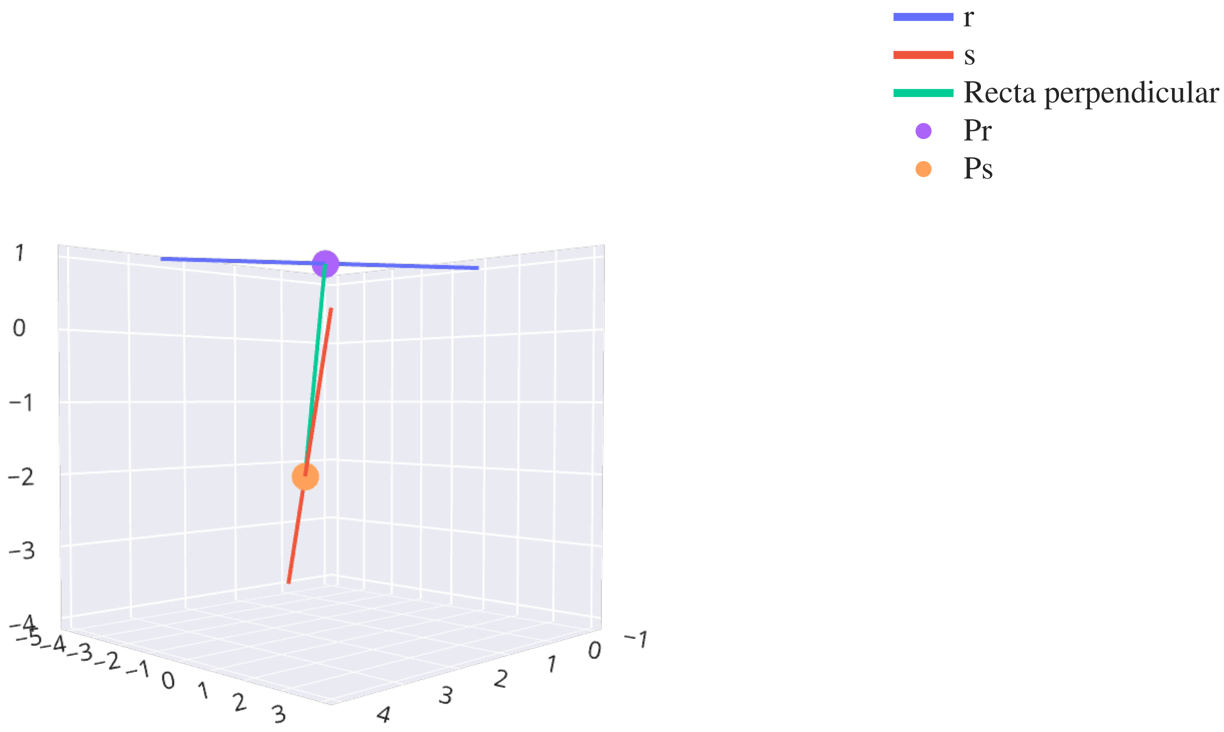
Un punto P de la recta r es el punto $P_r = (2,\ -3,\ 1)$, y un punto de la recta s puede ser $P_s = (0,\ -5,\ -4) \Rightarrow \overrightarrow{P_rP_s} = (0,\ -5,\ -4) - (2,\ -3,\ 1) = (-2,\ -2,\ -5)$

$$\left|\left[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right| = |det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}| = |11| = 11$$

$$\overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{u}_s = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (1,\ 1,\ -3) \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{u}_s| = \sqrt{(1)^2+(1)^2+(-3)^2} = \sqrt{11}$$

Por tanto: $d(r,s) = \dfrac{\left|\left[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \dfrac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$


r
s
Recta perpendicular
Pr
Ps
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
3
2
1
0
−1