Rectas que se cortan en el espacio y punto de corte

Dados los puntos $A\,(2,\ 4,\ 2)$ y $B\,(2,\ -1,\ -3)$ se considera la recta r que pasa por ambos. Se pide:

1. Obtén la ecuación vectorial, paramétrica, continua e implícita (o general) de r.
2. Estudia la posición relativa de la recta r con la recta s, cuya ecuación implícita es: $s \equiv \begin{cases} y-2 & =0 \\ 2x+3z-4 & =0 \end{cases}$
3. Halla las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas.

Solución

1. $\vec{u}_r = \overrightarrow{AB} = (2,\ -1,\ -3) - (2,\ 4,\ 2) = (0,\ -5,\ -5) \equiv (0,\ -1,\ -1)$
   - Vectorial: $(x, y, z) = (2,\ 4,\ 2) + u \cdot (0,\ -1,\ -1)$
   - Paramétrica: $\begin{cases} x = & 2 \\ y = & 4-u \\ z = & 2-u \end{cases}$
   - Continua: $\dfrac{y-(4)}{-1} = \dfrac{z-(2)}{-1}$, $x=2$
   - Implícita: $\begin{cases} x-2 & =0 \\ -y+z+2 & =0 \end{cases}$
2. Si introducimos parámetros en la ecuación implícita de s obtenemos que una posible expresión de s en paramétricas es $s : \begin{cases} x = & 3t+5 \\ y = & 2 \\ z = & -2t-2 \end{cases}$

   y por tanto $\overrightarrow{u}_s = (3,\ 0,\ -2)$ y un punto de s es $P_s = (5,\ 2,\ -2)$

   Ya sabemos que $\overrightarrow{u}_r = (0,\ -1,\ -1)$. Como $rango\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$ las rectas o se cortan o se cruzan (esto se puede ver también a partir de que los vectores directores no son proporcionales). Consideremos el vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (5,\ 2,\ -2) - (2,\ 4,\ 2) = (3,\ -2,\ -4)$

   .

   Como $rango\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ las rectas se cortan (también lo podemos ver con que $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$).
3. Las ecuaciones paramétricas de ambas rectas son: $r : \begin{cases} x = & 2 \\ y = & 4-u \\ z = & 2-u \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x = & 3t+5 \\ y = & 2 \\ z = & -2t-2 \end{cases}$

   Si igualamos ambas ecuaciones paramétricas obtenemos el sistema (en t y u)

$$\begin{array}{rcr} 3t+5=2 & & 3t+3=0 \\ 2=4-u & \Rightarrow & u-2=0 \\ -2t-2=2-u & & -2t+u-4=0 \end{array}$$

Si lo resolvemos (ya sabemos que es compatible), por ejemplo por Gauss, tenemos que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto tenemos como soluciones: $t=-1$ y $u=2$

En consecuencia, sustituyendo algunos de los dos parámetros anteriores en sus ecuaciones correspondientes, obtenemos que el punto de corte es

$$P=(2,\ 2,\ 0)$$