Resolución de sistemas 3x3 por la regla de Cramer

Regla de Cramer para sistemas 3x3

Si tenemos un sistema $\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = & b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = & b_2 \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = & b_3 \end{cases}$ que en forma matricial es de la forma $A{\cdot}X = B$, es decir $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ en el que $|A| \neq 0$,entonces

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

En el caso de que $|A| = 0$ y $rango(A) = rango(A^*)$ (SCI) podemos aplicar Cramer introduciendo parámetros a partir de un menor de A con determinante no nulo.

1. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} 4y + 5z = & 5 \\ 3x + 4y = & 1 \\ -2x - y + 2z = & -2 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{matrix} \end{array}$$

$$= [0 \cdot 4 \cdot 2 + 3\,(-1)\,5 + (-2)\,4 \cdot 0] - [5 \cdot 4\,(-2) + 0\,(-1)\,0 + 2 \cdot 4 \cdot 3]$$

$$= (-15) - (-16) = 1$$

Como $|A| \neq 0 \Rightarrow Rango(A) = Rango(A^*) = 3$ tenemos un SCD (tiene una sola solución)

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 5 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{matrix} \end{array}$$

$$= [5 \cdot 4 \cdot 2 + 1\,(-1)\,5 + (-2)\,4 \cdot 0] - [5 \cdot 4\,(-2) + 0\,(-1)\,5 + 2 \cdot 4 \cdot 1]$$

$$= (35) - (-32) = 67$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{67}{1} = 67$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{matrix} \end{array}$$

$$= [0 \cdot 1 \cdot 2 + 3\,(-2)\,5 + (-2)\,5 \cdot 0] - [5 \cdot 1\,(-2) + 0\,(-2)\,0 + 2 \cdot 5 \cdot 3]$$

$$= (-30) - (20) = -50$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-50}{1} = -50$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{matrix} \end{array}$$

$$= [0 \cdot 4\,(-2) + 3\,(-1)\,5 + (-2)\,4 \cdot 1] - [5 \cdot 4\,(-2) + 1\,(-1)\,0 + (-2)\,4 \cdot 3]$$

$$= (-23) - (-64) = 41$$

$$\Rightarrow z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{41}{1} = 41$$

Por tanto $\begin{cases} x = & 67 \\ y = & -50 \\ z = & 41 \end{cases}$

2. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} 2x + y - z = & -2 \\ -4x - y + 4z = & -2 \\ x - 2z = & 3 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 4 \end{array} \end{array}$$

$$= [2\,(-1)\,(-2) + (-4)\,0\,(-1) + 1 \cdot 1 \cdot 4] - [(-1)\,(-1)\,1 + 4 \cdot 0 \cdot 2 + (-2)\,1\,(-4)]$$

$$= (8) - (9) = -1$$

Como $|A| \neq 0 \Rightarrow Rango(A) = Rango(A^*) = 3$ tenemos un SCD (tiene una sola solución)

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{array} \end{array}$$

$$= [(-2)\,(-1)\,(-2) + (-2)\,0\,(-1) + 3 \cdot 1 \cdot 4] - [(-1)\,(-1)\,3 + 4 \cdot 0\,(-2) + (-2)\,1\,(-2)]$$

$$= (8) - (7) = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 2 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 4 \end{array} \end{array}$$

$$= [2\,(-2)\,(-2) + (-4)\,3\,(-1) + 1\,(-2)\,4] - [(-1)\,(-2)\,1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + (-2)\,(-2)\,(-4)]$$

$$= (12) - (10) = 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 2 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & -2 \end{array} \end{array}$$

$$= [2\,(-1)\,3 + (-4)\,0\,(-2) + 1 \cdot 1\,(-2)] - [(-2)\,(-1)\,1 + (-2)\,0 \cdot 2 + 3 \cdot 1\,(-4)]$$

$$= (-8) - (-10) = 2$$

$$\Rightarrow z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

Por tanto $\begin{cases} x = & -1 \\ y = & -2 \\ z = & -2 \end{cases}$

3. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} 4x - 2y - 3z = & 1 \\ -4x + y + 3z = & 1 \\ 5x - 3y - 4z = & -5 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & -4 & -5 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 4 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -4 \\ \hline 4 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \end{array}$$

$$= [4 \cdot 1\,(-4) + (-4)\,(-3)\,(-3) + 5\,(-2)\,3] - [(-3)\,1 \cdot 5 + 3\,(-3)\,4 + (-4)\,(-2)\,(-4)]$$

$$= (-82) - (-83) = 1$$

Como $|A| \neq 0 \Rightarrow Rango(A) = Rango(A^*) = 3$ tenemos un SCD (tiene una sola solución)

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & -4 \\ \hline 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}$$

$$= [1 \cdot 1\,(-4) + 1\,(-3)\,(-3) + (-5)\,(-2)\,3] - [(-3)\,1\,(-5) + 3\,(-3)\,1 + (-4)\,(-2)\,1]$$

$$= (35) - (14) = 21$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -5 & -3 & -4 \end{vmatrix}}{1} = \frac{21}{1} = 21$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 4 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & -4 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{4} & 1 & \multicolumn{1}{c}{-3} \\ \multicolumn{1}{c}{-4} & 1 & \multicolumn{1}{c}{3} \end{array}$$

$$= [4 \cdot 1\,(-4) + (-4)\,(-5)\,(-3) + 5 \cdot 1 \cdot 3] - [(-3)\,1 \cdot 5 + 3\,(-5)\,4 + (-4)\,1\,(-4)]$$

$$= (-61) - (-59) = -2$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & -4 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 4 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -5 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{4} & -2 & \multicolumn{1}{c}{1} \\ \multicolumn{1}{c}{-4} & 1 & \multicolumn{1}{c}{1} \end{array}$$

$$= [4 \cdot 1\,(-5) + (-4)\,(-3)\,1 + 5\,(-2)\,1] - [1 \cdot 1 \cdot 5 + 1\,(-3)\,4 + (-5)\,(-2)\,(-4)]$$

$$= (-18) - (-47) = 29$$

$$\Rightarrow z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -5 \end{vmatrix}}{1} = \frac{29}{1} = 29$$

Por tanto $\begin{cases} x = & 21 \\ y = & -2 \\ z = & 29 \end{cases}$

4. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} 5x + 4y + 4z = & 0 \\ 3x + 5y + 4z = & -1 \\ \phantom{5x + {}} 5y + 3z = & 3 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 5 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 5 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{5} & 4 & \multicolumn{1}{c}{4} \\ \multicolumn{1}{c}{3} & 5 & \multicolumn{1}{c}{4} \end{array}$$

$$= [5 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \cdot 4 + 0 \cdot 4 \cdot 4] - [4 \cdot 5 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 3]$$

$$= (135) - (136) = -1$$

Como $|A| \neq 0 \Rightarrow Rango(A) = Rango(A^*) = 3$ tenemos un SCD (tiene una sola solución)

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & 4 \end{matrix}$$

$$= [0 \cdot 5 \cdot 3 + (-1)\,5 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 4] - [4 \cdot 5 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 0 + 3 \cdot 4\,(-1)]$$

$$= (28) - (48) = -20$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-20}{-1} = 20$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{matrix}$$

$$= [5\,(-1)\,3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \cdot 4] - [4\,(-1)\,0 + 4 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \cdot 3]$$

$$= (21) - (60) = -39$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-39}{-1} = 39$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{matrix}$$

$$= [5 \cdot 5 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \cdot 0 + 0 \cdot 4\,(-1)] - [0 \cdot 5 \cdot 0 + (-1)\,5 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 3]$$

$$= (75) - (11) = 64$$

$$\Rightarrow z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{64}{-1} = -64$$

Por tanto $\begin{cases} x = & 20 \\ y = & 39 \\ z = & -64 \end{cases}$

5. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = & -2 \\ -3x + 4y + 5z = & 1 \\ -5x + 4y + 4z = & -5 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & 5 \\ -5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -4 & -2 \\ -3 & 4 & 5 & 1 \\ -5 & 4 & 4 & -5 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & 5 \\ -5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 2 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & 5 \\ -5 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & 5 \end{array}$$

$$= [2 \cdot 4 \cdot 4 + (-3)\,4\,(-4) + (-5)\,3 \cdot 5] - [(-4)\,4\,(-5) + 5 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3\,(-3)]$$

$$= (5) - (84) = -79$$

Como $|A| \neq 0 \Rightarrow Rango(A) = Rango(A^*) = 3$ tenemos un SCD (tiene una sola solución)

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 5 \\ -5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 5 \\ -5 & 4 & 4 \\ \hline -2 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 5 \end{array}$$

$$= [(-2)\,4 \cdot 4 + 1 \cdot 4\,(-4) + (-5)\,3 \cdot 5] - [(-4)\,4\,(-5) + 5 \cdot 4\,(-2) + 4 \cdot 3 \cdot 1]$$

$$= (-123) - (52) = -175$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 5 \\ -5 & 4 & 4 \end{vmatrix}}{-79} = \frac{-175}{-79} = \frac{175}{79}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 5 \\ -5 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 2 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 5 \\ -5 & -5 & 4 \\ \hline 2 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 5 \end{array}$$

$$= [2 \cdot 1 \cdot 4 + (-3)\,(-5)\,(-4) + (-5)\,(-2)\,5] - [(-4)\,1\,(-5) + 5\,(-5)\,2 + 4\,(-2)\,(-3)]$$

$$= (-2) - (-6) = 4$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 5 \\ -5 & -5 & 4 \end{vmatrix}}{-79} = \frac{4}{-79} = -\frac{4}{79}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -5 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 2 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -5 & 4 & -5 \\ \hline 2 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{array}$$

$$= [2 \cdot 4\,(-5) + (-3)\,4\,(-2) + (-5)\,3 \cdot 1] - [(-2)\,4\,(-5) + 1 \cdot 4 \cdot 2 + (-5)\,3\,(-3)]$$

$$= (-31) - (93) = -124$$

$$\Rightarrow z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -5 & 4 & -5 \end{vmatrix}}{-79} = \frac{-124}{-79} = \frac{124}{79}$$

Por tanto $\begin{cases} x = & \dfrac{175}{79} \\ y = & -\dfrac{4}{79} \\ z = & \dfrac{124}{79} \end{cases}$

6. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} -5x + y + 4z = & 1 \\ x + 2y - 5z = & 3 \\ 4x + 2y - z = & 4 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} -5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \\ \hline -5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \end{array}$$

$$= [(-5)\,2\,(-1) + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1\,(-5)] - [4 \cdot 2 \cdot 4 + (-5)\,2\,(-5) + (-1)\,1 \cdot 1]$$

$$= (-2) - (81) = -83$$

Como $|A| \neq 0 \Rightarrow Rango(A) = Rango(A^*) = 3$ tenemos un SCD (tiene una sola solución)

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \end{array}$$

$$= [1 \cdot 2\,(-1) + 3 \cdot 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1\,(-5)] - [4 \cdot 2 \cdot 4 + (-5)\,2 \cdot 1 + (-1)\,1 \cdot 3]$$

$$= (2) - (19) = -17$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-83} = \frac{-17}{-83} = \frac{17}{83}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \end{matrix}$$

$$= [(-5)\,3\,(-1) + 1 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 1\,(-5)] - [4 \cdot 3 \cdot 4 + (-5)\,4\,(-5) + (-1)\,1 \cdot 1]$$

$$= (11) - (147) = -136$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{-83} = \frac{-136}{-83} = \frac{136}{83}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

$$= [(-5)\,2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 3] - [1 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2\,(-5) + 4 \cdot 1 \cdot 1]$$

$$= (-26) - (-18) = -8$$

$$\Rightarrow z = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{-83} = \frac{-8}{-83} = \frac{8}{83}$$

Por tanto $\begin{cases} x = \dfrac{17}{83} \\ y = \dfrac{136}{83} \\ z = \dfrac{8}{83} \end{cases}$

7. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} -2x + 4y - 2z = 1 \\ -5z = -2 \\ 3x + 5y + 4z = -1 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{matrix}$$

$$= [(-2)\,0 \cdot 4 + 0 \cdot 5\,(-2) + 3 \cdot 4\,(-5)] - [(-2)\,0 \cdot 3 + (-5)\,5\,(-2) + 4 \cdot 4 \cdot 0]$$

$$= (-60) - (50) = -110$$

Como $|A| \neq 0 \Rightarrow Rango(A) = Rango(A^*) = 3$ tenemos un SCD (tiene una sola solución)

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & -5 \end{matrix} \end{array}$$

$$= [1 \cdot 0 \cdot 4 + (-2)\,5\,(-2) + (-1)\,4\,(-5)] - [(-2)\,0\,(-1) + (-5)\,5 \cdot 1 + 4 \cdot 4\,(-2)]$$

$$= (40) - (-57) = 97$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & -5 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}}{-110} = \frac{97}{-110} = -\frac{97}{110}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{matrix} \end{array}$$

$$= [(-2)\,(-2)\,4 + 0\,(-1)\,(-2) + 3 \cdot 1\,(-5)] - [(-2)\,(-2)\,3 + (-5)\,(-1)\,(-2) + 4 \cdot 1 \cdot 0]$$

$$= (1) - (2) = -1$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{-110} = \frac{-1}{-110} = \frac{1}{110}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix} \end{array}$$

$$= [(-2)\,0\,(-1) + 0 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 4\,(-2)] - [1 \cdot 0 \cdot 3 + (-2)\,5\,(-2) + (-1)\,4 \cdot 0]$$

$$= (-24) - (20) = -44$$

$$\Rightarrow z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{-110} = \frac{-44}{-110} = \frac{2}{5}$$

Por tanto $\begin{cases} x = & -\dfrac{97}{110} \\ y = & \dfrac{1}{110} \\ z = & \dfrac{2}{5} \end{cases}$

8. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} -2x - 5y + z = & -2 \\ -5x - 4z = & 0 \\ x - 2y + z = & -5 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -5 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -2 & -5 & 1 & -2 \\ -5 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -5 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -5 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \color{cyan}{\begin{matrix} -2 & -5 & 1 \\ -5 & 0 & -4 \end{matrix}} \end{array}$$

$$= [(-2)\, 0 \cdot 1 + (-5)\, (-2)\, 1 + 1\, (-5)\, (-4)] - [1 \cdot 0 \cdot 1 + (-4)\, (-2)\, (-2) + 1\, (-5)\, (-5)]$$

$$= (30) - (9) = 21$$

Como $|A| \neq 0 \Rightarrow Rango(A) = Rango(A^*) = 3$ tenemos un SCD (tiene una sola solución)

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ \color{cyan}{\begin{matrix} -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{matrix}} \end{array}$$

$$= [(-2)\, 0 \cdot 1 + 0\, (-2)\, 1 + (-5)\, (-5)\, (-4)] - [1 \cdot 0\, (-5) + (-4)\, (-2)\, (-2) + 1\, (-5)\, 0]$$

$$= (-100) - (-16) = -84$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{21} = \frac{-84}{21} = -4$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix} \\ \color{cyan}{\begin{matrix} -2 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & -4 \end{matrix}} \end{array}$$

$$= [(-2)\, 0 \cdot 1 + (-5)\, (-5)\, 1 + 1\, (-2)\, (-4)] - [1 \cdot 0 \cdot 1 + (-4)\, (-5)\, (-2) + 1\, (-2)\, (-5)]$$

$$= (33) - (-30) = 63$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}}{21} = \frac{63}{21} = 3$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -5 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -5 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} \\ \color{cyan}{\begin{matrix} -2 & -5 & -2 \\ -5 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{array}$$

$$= [(-2)\, 0\, (-5) + (-5)\, (-2)\, (-2) + 1\, (-5)\, 0] - [(-2)\, 0 \cdot 1 + 0\, (-2)\, (-2) + (-5)\, (-5)\, (-5)]$$

$$= (-20) - (-125) = 105$$

$$\Rightarrow z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -5 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix}}{21} = \frac{105}{21} = 5$$

Por tanto $\begin{cases} x = & -4 \\ y = & 3 \\ z = & 5 \end{cases}$

9. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} -x - 5y - 3z = & 0 \\ -x + 3y - z = & 4 \\ -2z = & 5 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -5 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} -1 & -5 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ \hline -1 & -5 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{array}$$

$$= [(-1)\,3\,(-2) + (-1)\,0\,(-3) + 0\,(-5)\,(-1)] - [(-3)\,3 \cdot 0 + (-1)\,0\,(-1) + (-2)\,(-5)\,(-1)]$$

$$= (6) - (-10) = 16$$

Como $|A| \neq 0 \Rightarrow Rango(A) = Rango(A^*) = 3$ tenemos un SCD (tiene una sola solución)

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 0 & -5 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ \hline 0 & -5 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{array}$$

$$= [0 \cdot 3\,(-2) + 4 \cdot 0\,(-3) + 5\,(-5)\,(-1)] - [(-3)\,3 \cdot 5 + (-1)\,0 \cdot 0 + (-2)\,(-5)\,4]$$

$$= (25) - (-5) = 30$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{16} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ \hline -1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \end{array}$$

$$= [(-1)\,4\,(-2) + (-1)\,5\,(-3) + 0\cdot 0\,(-1)] - [(-3)\,4\cdot 0 + (-1)\,5\,(-1) + (-2)\,0\,(-1)]$$
$$= (23) - (5) = 18$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} -1 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ \hline -1 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{array}$$

$$= [(-1)\,3\cdot 5 + (-1)\,0\cdot 0 + 0\,(-5)\,4] - [0\cdot 3\cdot 0 + 4\cdot 0\,(-1) + 5\,(-5)\,(-1)]$$
$$= (-15) - (25) = -40$$

$$\Rightarrow z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{16} = \frac{-40}{16} = -\frac{5}{2}$$

Por tanto $\begin{cases} x = & \dfrac{15}{8} \\ y = & \dfrac{9}{8} \\ z = & -\dfrac{5}{2} \end{cases}$

10. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} -x - 2y = & -3 \\ -3x - y - 5z = & -2 \\ -3x = & -4 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -5 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & -2 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -5 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} -1 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -5 \\ -3 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & 0 \\ -3 & -1 & -5 \end{array}$$

$$= [(-1)\,(-1)\,0 + (-3)\,0\cdot 0 + (-3)\,(-2)\,(-5)] - [0\,(-1)\,(-3) + (-5)\,0\,(-1) + 0\,(-2)\,(-3)]$$

$$= (-30) - (0) = -30$$

Como $|A| \neq 0 \Rightarrow Rango(A) = Rango(A^*) = 3$ tenemos un SCD (tiene una sola solución)

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -5 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -5 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -5 \end{matrix}$$

$$= [(-3)(-1)0 + (-2)0 \cdot 0 + (-4)(-2)(-5)] - [0(-1)(-4) + (-5)0(-3) + 0(-2)(-2)]$$

$$= (-40) - (0) = -40$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -5 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{-40}{-30} = \frac{4}{3}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & -5 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & -5 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & -5 \end{matrix}$$

$$= [(-1)(-2)0 + (-3)(-4)0 + (-3)(-3)(-5)] - [0(-2)(-3) + (-5)(-4)(-1) + 0(-3)(-3)]$$

$$= (-45) - (-20) = -25$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & -5 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{-25}{-30} = \frac{5}{6}$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{matrix}$$

$$= [(-1)(-1)(-4) + (-3)0(-3) + (-3)(-2)(-2)] - [(-3)(-1)(-3) + (-2)0(-1) + (-4)(-2)(-3)]$$

$$= (-16) - (-33) = 17$$

$$\Rightarrow z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{17}{-30} = -\frac{17}{30}$$

Por tanto $\begin{cases} x = & \frac{4}{3} \\ y = & \frac{5}{6} \\ z = & -\frac{17}{30} \end{cases}$

11. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} -2x - 2z = & 3 \\ x + 2y - z = & 4 \\ -4x - 4y = & -5 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -4 & -4 & 0 & -5 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & -4 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{matrix} \end{array}$$

$$= [(-2)\,2 \cdot 0 + 1\,(-4)\,(-2) + (-4)\,0\,(-1)] - [(-2)\,2\,(-4) + (-1)\,(-4)\,(-2) + 0 \cdot 0 \cdot 1]$$

$$= (8) - (8) = 0$$

Como

$$|A_{3,3}| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= [(-2)\,2] - [0 \cdot 1]$$

$$= (-4) - (0) = -4$$

y como

$$|A_3^*| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -4 & -4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -4 & -4 & -5 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix} \end{array}$$

$$= [(-2)\,2\,(-5) + 1\,(-4)\,3 + (-4)\,0 \cdot 4] - [3 \cdot 2\,(-4) + 4\,(-4)\,(-2) + (-5)\,0 \cdot 1]$$

$$= (8) - (8) = 0$$

Se obtiene que $Rango(A) = Rango(A^*) = 2$ y se trata de un SCI (infinitas soluciones).
A partir de lo anterior podemos reescribir el sistema como sigue:

- Eliminamos la fila 3
- Introducimos el parámetro $z = \lambda$

y quedaría que: $\begin{cases} -2x = & 2\lambda + 3 \\ x + 2y = & \lambda + 4 \end{cases}$ con $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2\lambda + 3 & 0 \\ \lambda + 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= [(2\lambda + 3)\,2] - [0\,(\lambda + 4)]$$

$$= (4\lambda + 6) - (0) = 4\lambda + 6$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda + 3 & 0 \\ \lambda + 4 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{4\lambda + 6}{-4} = -\lambda - \frac{3}{2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -2 & 2\lambda+3 \\ 1 & \lambda+4 \end{vmatrix} =$$

$$= [(-2)(\lambda+4)] - [(2\lambda+3)\,1]$$

$$= (-2\lambda-8) - (2\lambda+3) = -4\lambda-11$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2\lambda+3 \\ 1 & \lambda+4 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4\lambda-11}{-4} = \lambda + \frac{11}{4}$$

Por tanto $\begin{cases} x = & -\lambda - \dfrac{3}{2} \\ y = & \lambda + \dfrac{11}{4} \\ z = & \lambda \end{cases}$

12. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} 0 = & 0 \\ 5x+3z = & -1 \\ -2x+3y-5z = & 5 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -5 & 5 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$ ya que la fila 1 de la matriz es toda nula.

Como

$$|A_{1,3}| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= [5 \cdot 3] - [0\,(-2)]$$

$$= (15) - (0) = 15$$

y como

$|A_3^*| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$ ya que la fila 1 de la matriz es toda nula.

Se obtiene que $Rango(A) = Rango(A^*) = 2$ y se trata de un SCI (infinitas soluciones).
A partir de lo anterior podemos reescribir el sistema como sigue:

- Eliminamos la fila 1
- Introducimos el parámetro $z = \lambda$

y quedaría que: $\begin{cases} 5x = & -3\lambda-1 \\ -2x+3y = & 5\lambda+5 \end{cases}$ con $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 15$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -3\lambda-1 & 0 \\ 5\lambda+5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= [(-3\lambda-1)\,3] - [0\,(5\lambda+5)]$$

$$= (-9\lambda-3) - (0) = -9\lambda-3$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -3\lambda-1 & 0 \\ 5\lambda+5 & 3 \end{vmatrix}}{15} = \frac{-9\lambda-3}{15} = -\frac{3\lambda}{5} - \frac{1}{5}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 5 & -3\lambda-1 \\ -2 & 5\lambda+5 \end{vmatrix} =$$

$$= [5\,(5\lambda+5)] - [(-3\lambda-1)\,(-2)]$$

$$= (25\lambda+25) - (6\lambda+2) = 19\lambda+23$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3\lambda-1 \\ -2 & 5\lambda+5 \end{vmatrix}}{15} = \frac{19\lambda+23}{15} = \frac{19\lambda}{15} + \frac{23}{15}$$

Por tanto $\begin{cases} x = & -\dfrac{3\lambda}{5} - \dfrac{1}{5} \\ y = & \dfrac{19\lambda}{15} + \dfrac{23}{15} \\ z = & \lambda \end{cases}$

13. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} 5y - 5z = & 1 \\ 3x - 2y - z = & 5 \\ -5y + 5z = & -1 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -1 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 0 & 5 & -5 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ \hline 0 & 5 & -5 \\ 3 & -2 & -1 \end{array}$$

$$= [0\,(-2)\,5 + 3\,(-5)\,(-5) + 0 \cdot 5\,(-1)] - [(-5)\,(-2)\,0 + (-1)\,(-5)\,0 + 5 \cdot 5 \cdot 3]$$

$$= (75) - (75) = 0$$

Como

$$|A_{3,3}| = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= [0\,(-2)] - [5 \cdot 3]$$

$$= (0) - (15) = -15$$

y como

$$|A_3^*| = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{matrix}$$

$$= [0\,(-2)\,(-1) + 3\,(-5)\,1 + 0 \cdot 5 \cdot 5] - [1\,(-2)\,0 + 5\,(-5)\,0 + (-1)\,5 \cdot 3]$$

$$= (-15) - (-15) = 0$$

Se obtiene que $Rango(A) = Rango(A^*) = 2$ y se trata de un SCI (infinitas soluciones). A partir de lo anterior podemos reescribir el sistema como sigue:

- Eliminamos la fila 3
- Introducimos el parámetro $z = \lambda$

y quedaría que: $\begin{cases} 5y = & 5\lambda + 1 \\ 3x - 2y = & \lambda + 5 \end{cases}$ con $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -15$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 5\lambda + 1 & 5 \\ \lambda + 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= [(5\lambda + 1)\,(-2)] - [5\,(\lambda + 5)]$$

$$= (-10\lambda - 2) - (5\lambda + 25) = -15\lambda - 27$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 5\lambda + 1 & 5 \\ \lambda + 5 & -2 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-15\lambda - 27}{-15} = \lambda + \frac{9}{5}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 0 & 5\lambda + 1 \\ 3 & \lambda + 5 \end{vmatrix} =$$

$$= [0\,(\lambda + 5)] - [(5\lambda + 1)\,3]$$

$$= (0) - (15\lambda + 3) = -15\lambda - 3$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5\lambda + 1 \\ 3 & \lambda + 5 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-15\lambda - 3}{-15} = \lambda + \frac{1}{5}$$

Por tanto $\begin{cases} x = & \lambda + \dfrac{9}{5} \\ y = & \lambda + \dfrac{1}{5} \\ z = & \lambda \end{cases}$

14. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} -x - 2y + 3z = & 3 \\ x + 2y - 3z = & -3 \\ -5x + 2y = & 0 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{matrix}$$

$$= [(-1)\,2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + (-5)\,(-2)\,(-3)] - [3 \cdot 2\,(-5) + (-3)\,2\,(-1) + 0\,(-2)\,1]$$

$$= (-24) - (-24) = 0$$

Como

$$|A_{2,3}| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= [(-1)\,2] - [(-2)\,(-5)]$$

$$= (-2) - (10) = -12$$

y como

$$|A_3^*| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{matrix}$$

$$= [(-1)\,2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + (-5)\,(-2)\,(-3)] - [3 \cdot 2\,(-5) + (-3)\,2\,(-1) + 0\,(-2)\,1]$$

$$= (-24) - (-24) = 0$$

Se obtiene que $Rango(A) = Rango(A^*) = 2$ y se trata de un SCI (infinitas soluciones).
A partir de lo anterior podemos reescribir el sistema como sigue:

- Eliminamos la fila 2
- Introducimos el parámetro $z = \lambda$

y quedaría que: $\begin{cases} -x - 2y = & 3 - 3\lambda \\ -5x + 2y = & 0 \end{cases}$ con $|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -12$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3-3\lambda & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= [(3-3\lambda)\,2] - [(-2)\,0]$$

$$= (6-6\lambda) - (0) = 6 - 6\lambda$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 3-3\lambda & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{6-6\lambda}{-12} = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} -1 & 3-3\lambda \\ -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= [(-1)\,0] - [(3-3\lambda)\,(-5)]$$

$$= (0) - (15\lambda - 15) = 15 - 15\lambda$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3-3\lambda \\ -5 & 0 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{15-15\lambda}{-12} = \frac{5\lambda}{4} - \frac{5}{4}$$

Por tanto $\begin{cases} x = & \dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{1}{2} \\ y = & \dfrac{5\lambda}{4} - \dfrac{5}{4} \\ z = & \lambda \end{cases}$

15. **Resuelve por la regla de Cramer el sistema:**

$$\begin{cases} 2x + 3y + 3z = & 4 \\ x - 3y - 3z = & 2 \\ -4y - 4z = & 0 \end{cases}$$

Solución:

El sistema, en forma matricial $A \cdot X = B$, se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además, su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right)$

Calculemos el determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \end{array}$$

$$= [2\,(-3)\,(-4) + 1\,(-4)\,3 + 0 \cdot 3\,(-3)] - [3\,(-3)\,0 + (-3)\,(-4)\,2 + (-4)\,3 \cdot 1]$$

$$= (12) - (12) = 0$$

Como

$|A_{3,3}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$

$$= [2\,(-3)] - [3 \cdot 1]$$

$$= (-6) - (3) = -9$$

y como

$$|A_3^*| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{array}$$

$$= [2\,(-3)\,0 + 1\,(-4)\,4 + 0 \cdot 3 \cdot 2] - [4\,(-3)\,0 + 2\,(-4)\,2 + 0 \cdot 3 \cdot 1]$$

$$= (-16) - (-16) = 0$$

Se obtiene que $Rango(A) = Rango(A^*) = 2$ y se trata de un SCI (infinitas soluciones).
A partir de lo anterior podemos reescribir el sistema como sigue:

- Eliminamos la fila 3
- Introducimos el parámetro $z = \lambda$

y quedaría que: $\begin{cases} 2x + 3y = & 4 - 3\lambda \\ x - 3y = & 3\lambda + 2 \end{cases}$ con $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 - 3\lambda & 3 \\ 3\lambda + 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= [(4 - 3\lambda)(-3)] - [3(3\lambda + 2)]$$

$$= (9\lambda - 12) - (9\lambda + 6) = -18$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 4 - 3\lambda & 3 \\ 3\lambda + 2 & -3 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-18}{-9} = 2$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 4 - 3\lambda \\ 1 & 3\lambda + 2 \end{vmatrix} =$$

$$= [2(3\lambda + 2)] - [(4 - 3\lambda)1]$$

$$= (6\lambda + 4) - (4 - 3\lambda) = 9\lambda$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 - 3\lambda \\ 1 & 3\lambda + 2 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{9\lambda}{-9} = -\lambda$$

Por tanto $\begin{cases} x = & 2 \\ y = & -\lambda \\ z = & \lambda \end{cases}$