Simétrico de un punto respecto de un plano en el espacio

Paco Villegas

Ejercicio. Halla el punto simétrico de $P\,(-1,\ -4,\ 0)$ con respecto al plano que pasa por los puntos $A\,(0,\ 1,\ 3)$, $B\,(-6,\ -3,\ 3)$ y $C\,(6,\ -8,\ 16)$.

Solución. En primer lugar obtengamos los elementos que me permiten hallar la ecuación general del plano, lo podemos hacer a partir de obtener dos vectores directores y un punto

Nota: los vectores directores es mejor simplificarlos dividiéndolos por un factor común, lo mismo se debe hacer con el vector normal que se obtiene después

$A\,(0,\ 1,\ 3)$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-6,\ -3,\ 3) - (0,\ 1,\ 3) = (-6,\ -4,\ 0) \equiv (-3,\ -2,\ 0)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (6,\ -8,\ 16) - (0,\ 1,\ 3) = (6,\ -9,\ 13) \equiv (6,\ -9,\ 13)$

y con esa información obtener la ecuación general a partir de:

1. $\begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ -3 & -2 & 0 \\ 6 & -9 & 13 \end{vmatrix} = -26x + 39y + 39z - 156 = 0$

2. O bien obtener un vector normal haciendo el producto vectorial de los dos vectores directores del plano y luego obtener la D imponiendo que la ecuación obtenida pase por uno de los puntos.

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -9 & 13 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 13 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -26 & 39 & 39 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{n}_\pi \equiv (2,\ -3,\ -3)$$

$$2 \cdot x + -3 \cdot y + -3 \cdot z + D = 0 \Rightarrow (2) \cdot (0) + (-3) \cdot (1) + (-3) \cdot (3) + D = 0$$

$$(0) + (-3) + (-9) + D = 0 \Rightarrow -12 + D = 0 \Rightarrow D = 12$$

Nota: También podemos obtener de forma directa la ecuación a partir de que $D = \vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{OA} = (2,\ -3,\ -3) \cdot (0,\ 1,\ 3) = 12$

En cualquier caso, se obtendría que la ecuación del plano ya simplificada es:

$$\pi \equiv 2x - 3y - 3z + 12 = 0$$

Obtengamos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano (podemos usar como vector director el normal al plano que es $(2,\ -3,\ -3)$):

$$r \equiv \begin{cases} x = & 2t - 1 \\ y = & -3t - 4 \\ z = & -3t \end{cases}$$

Si sustituimos el resultado anterior en la ecuación del plano π (simplificado) se obtiene el valor de t que nos permite hallar el punto de intersección

$$(2)\cdot(2t-1)+(-3)\cdot(-3t-4)+(-3)\cdot(-3t)+(12)=0$$
$$\Rightarrow 22t+22=0 \Rightarrow t=-1$$

Por tanto son secantes y el punto de intersección es $Q(-3,\ -1,\ 3)$ (se obtiene sustituyendo el valor anterior del parámetro en la ecuación de la recta).

Ese punto es el punto medio de P y su simétrico, aplicando la fórmula del punto medio obtenemos que el punto pedido es

$$P' = P + 2\cdot\overrightarrow{PQ} = (-1,\ -4,\ 0)+2\cdot((-3,\ -1,\ 3)-(-1,\ -4,\ 0)) = (-1,\ -4,\ 0)+2\cdot(-2,\ 3,\ 3) = (-5,\ 2,\ 6)$$