# Hallar $\beta$ para que tres planos se corten en un recta y punto simétrico respecto de esa recta.

**Ejercicio**

1. Determina el valor de $\beta$ para el cual los planos cuyas ecuaciones se dan a continuación contienen una misma recta: $\begin{cases} x(\beta+4)+2y+z= & -3 \\ x-y+3z= & \beta+1 \\ x(\beta+3)+3y+z(\beta+1)= & \beta+2 \end{cases}$
2. Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto de la recta común a la que se refiere el apartado anterior.

**Solución**

1. Como los tres planos se cortan en una recta, tenemos un *SCI* con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. En este caso $rango(A) = rango(A^*) = 2$ y en consecuencia todos los determinantes de orden 3 que se pueden obtener de la matriz ampliada

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} \beta+4 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & \beta+1 \\ \beta+3 & 3 & \beta+1 & \beta+2 \end{array}\right)$$

tienen que ser nulos.

Como el determinante de la submatriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= [2\cdot 3] -$$
$$[1(-1)]$$
$$= (6)-(-1) = 7$$

es no nulo, podemos orlar a partir de esa submatriz y tenemos que todos los menores de orden 3 construidos a partir de ella han de ser cero:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} \beta+4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \beta+3 & 3 & \beta+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta+4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ \beta+3 & 3 & \beta+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \beta+4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{matrix}$$

$$= [(\beta+4)(-1)(\beta+1)+1\cdot 3\cdot 1+(\beta+3)2\cdot 3] -$$
$$[1(-1)(\beta+3)+3\cdot 3(\beta+4)+(\beta+1)2\cdot 1]$$
$$= \left(-\beta^2+\beta+17\right)-(10\beta+35) = -\beta^2-9\beta-18$$

$\Rightarrow -\beta^2-9\beta-18=0$ resolviendo esa ecuación obtenemos que $\beta = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$ $\dfrac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot(-1)\cdot(-18)}}{2\cdot -1} = \dfrac{9\pm\sqrt{9}}{-2} = \dfrac{9\pm 3}{-2} \Rightarrow \beta = \begin{cases} -6 \\ -3 \end{cases}$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & \beta+1 \\ 3 & \beta+1 & \beta+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & \beta+1 \\ 3 & \beta+1 & \beta+2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & \beta+1 \end{matrix}$$

$$= [2\cdot 3\,(\beta+2) + (-1)\,(\beta+1)\,(-3) + 3\cdot 1\,(\beta+1)] -$$

$$[(-3)\,3\cdot 3 + (\beta+1)\,(\beta+1)\,2 + (\beta+2)\,1\,(-1)]$$

$$= (12\beta+18) - \left(2\beta^2+3\beta-27\right) = -2\beta^2+9\beta+45$$

$\Rightarrow -2\beta^2+9\beta+45=0$ resolviendo esa ecuación obtenemos que $\beta = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$ $\dfrac{-9\pm\sqrt{(9)^2-4\cdot(-2)\cdot(45)}}{2\cdot -2} = \dfrac{-9\pm\sqrt{441}}{-4} = \dfrac{-9\pm 21}{-4} \Rightarrow \beta = \begin{cases} -3 \\ 15/2 \end{cases}$

El valor de $\beta$ que verifica las dos[1] es $\beta=-3$

2. Para $\beta=-3$ el sistema queda:

$$\begin{cases} x+2y+z = & -3 \\ x-y+3z = & -2 \\ \quad 3y-2z = & -1 \end{cases}$$

y su matriz ampliada es $A^* = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right)$

Ya sabemos que es un *SCI* que depende de un parámetro (se cortan en una recta), que $|A|=0$ y que $rango(A) = rango(A^*) = 2$. Si lo resolvemos, por ejemplo por Cramer, podemos obtener la ecuación paramétrica de la recta.

Tenemos que

$$|A_{3,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= [1\,(-1)] -$$

$$[2\cdot 1]$$

$$= (-1) - (2) = -3$$

A partir de lo anterior podemos reescribir el sistema como sigue:

- Eliminamos la fila 3
- Introducimos el parámetro $z=\lambda$

y quedaría que:

$$\begin{cases} x+2y = & -\lambda-3 \\ \quad x-y = & -3\lambda-2 \end{cases}$$

con $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -\lambda-3 & 2 \\ -3\lambda-2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= [(-\lambda-3)\,(-1)] -$$

$$[2\,(-3\lambda-2)]$$

$$= (\lambda+3) - (-6\lambda-4) = 7\lambda+7$$

[1] En el programa no se controla el caso en el que los dos determinantes anteriores tengan las mismas raíces

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} -\lambda-3 & 2 \\ -3\lambda-2 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{7\lambda+7}{-3} = -\frac{7\lambda}{3} - \frac{7}{3}$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda-3 \\ 1 & -3\lambda-2 \end{vmatrix} =$$

$$= [1\,(-3\lambda-2)] - [(-\lambda-3)\,1]$$

$$= (-3\lambda-2) - (-\lambda-3) = 1-2\lambda$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\lambda-3 \\ 1 & -3\lambda-2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1-2\lambda}{-3} = \frac{2\lambda}{3} - \frac{1}{3}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} x = & -\frac{7\lambda}{3} - \frac{7}{3} \\ y = & \frac{2\lambda}{3} - \frac{1}{3} \\ z = & \lambda \end{cases}$$

de lo anterior obtenemos que $\vec{u}_r \equiv \left(-\frac{7}{3},\ \frac{2}{3},\ 1\right) \equiv (-7,\ 2,\ 3)$, $P_r\left(-\frac{7}{3},\ -\frac{1}{3},\ 0\right)$ y la ecuación paramétrica de $r$ es

$$r \equiv \begin{cases} x = & -7\lambda - \frac{7}{3} \\ y = & 2\lambda - \frac{1}{3} \\ z = & 3\lambda \end{cases}$$

Para calcular el punto $O'$ simétrico del origen respecto de la recta $r$ anterior, hayamos el plano $\pi$ de ecuación general $Ax+By+Cz=D$. Sabemos que:

- es perpendicular a dicha recta $\Rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{u}_r \Rightarrow \begin{cases} A & = & -7 \\ B & = & 2 \\ C & = & 3 \end{cases}$
- pasa por el origen de coordenadas $O(0,0,0) \Rightarrow D = 0$

Por tanto:

$\pi \equiv -7x+2y+3z = 0$

Sustituyendo en la ecuación del plano $\pi$ los valores de la ecuación paramétrica de la recta:

$$(-7)\cdot\left(-7\lambda - \frac{7}{3}\right) + (2)\cdot\left(2\lambda - \frac{1}{3}\right) + (3)\cdot(3\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow 62\lambda + \frac{47}{3} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{47}{186}$$

Al sustituir ese valor de $\lambda$ en la ecuación de $r$ obtenemos el punto

$$\begin{cases} x & = & -\frac{7}{3} - 7\left(-\frac{47}{186}\right) \\ y & = & -\frac{1}{3} + 2\left(-\frac{47}{186}\right) \\ z & = & 3\left(-\frac{47}{186}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & = & -\frac{35}{62} \\ y & = & -\frac{26}{31} \\ z & = & -\frac{47}{62} \end{cases}$$

$Q \equiv \left(-\frac{35}{62},\ -\frac{26}{31},\ -\frac{47}{62}\right)$ es el punto medio del segmento $OO'$, aplicando la fórmula del punto medio obtenemos que el punto pedido es

$$O' = O + 2\cdot\overrightarrow{OQ} = (0,\ 0,\ 0) + 2\cdot\left(-\frac{35}{62},\ -\frac{26}{31},\ -\frac{47}{62}\right) = \left(-\frac{35}{31},\ -\frac{52}{31},\ -\frac{47}{31}\right)$$