

Problema de diagrama en árbol y teorema de Bayes

Se ha propuesto solo a tres personas (María, Ana y Juan) para ocupar la presidencia de una comunidad de vecinos. La probabilidad de que se elija a María es del 0,3 y de que elija a Ana del 0,5. Si se elije a María, la probabilidad de que se incremente la cuota anual de la comunidad es del 0,3, si se elije a Ana del 0,5 y si se elije a Juan del 0,4.

1. Realiza un diagrama en árbol que resuma el problema.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que haya un incremento de la cuota anual?
3. Si tras elegir al nuevo presidente sabemos que se han aumentado las cuotas anuales, ¿cuál es la probabilidad de Ana haya sido elegida presidenta del Club?

Solución

1. Empezaremos definiendo los sucesos:

$M = \{\text{Sale elegida María}\}$

$A = \{\text{Sale elegida Ana}\}$

$J = \{\text{Sale elegido Juan}\}$

Los sucesos M , A y J son un sistema completo de sucesos.

$I = \{\text{se incrementa la cuota anual}\}$

$\bar{I} = \{\text{no se incrementa la cuota anual}\}$

Tenemos que:

$$P(M) = 0,3$$

$$P(A) = 0,5$$

$$P(J) = 1 - P(A) - P(M) = 1 - 0,5 - 0,3 = 0,2$$

$$P(I/M) = 0,3$$

$$P(\bar{I}/M) = 1 - 0,3 = 0,7$$

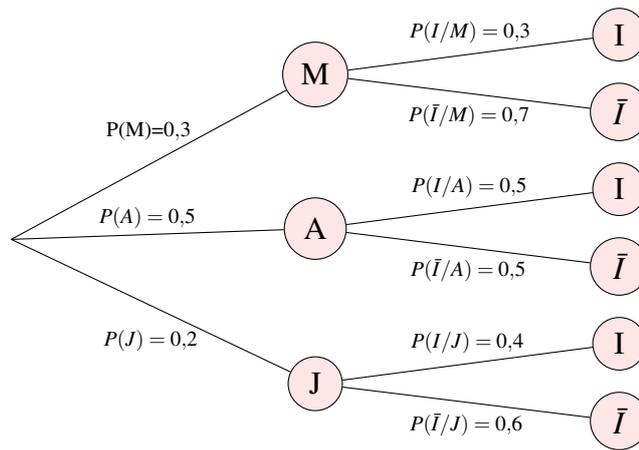
$$P(I/A) = 0,5$$

$$P(\bar{I}/A) = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$P(I/J) = 0,4$$

$$P(\bar{I}/J) = 1 - 0,4 = 0,6$$

Por tanto el diagrama en árbol es:



2. Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(I) = P(M) \cdot P(I/M) + P(A) \cdot P(I/A) + P(J) \cdot P(I/J) = 0,3 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,4 = 0,42$$

3. Apliquemos el teorema de Bayes, en este caso tenemos que la probabilidad pedida es:

$$P(A/I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{P(A) \cdot P(I/A)}{P(I)} = \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,42} = 0,5952$$