Halla los puntos de r cuya distancia a π es de x unidades.

Ejercicio Considera el plano π, determinado por los puntos $A\,(0,\ 1,\ 4)$, $B\,(3,\ 4,\ 0)$ y $C\,(0,\ 4,\ -2)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x+3y-3 & =0 \\ -x+3z+9 & =0 \end{cases}$

Halla los puntos de r cuya distancia a π es de 7 unidades.

Solución.

Obtengamos los vectores directores del plano que pasa por A, B y C . Los vectores directores es mejor simplificarlos dividiéndolos por un factor común, lo mismo se debe hacer con el vector normal que se obtiene después

$\overrightarrow{AB} = (3,\ 4,\ 0) - (0,\ 1,\ 4) = (3,\ 3,\ -4) \Rightarrow \vec{u} \equiv (3,\ 3,\ -4)$

$\overrightarrow{AC} = (0,\ 4,\ -2) - (0,\ 1,\ 4) = (0,\ 3,\ -6) \Rightarrow \vec{v} \equiv (0,\ 1,\ -2)$

Podemos hacerlo obteniendo la ecuación la ecuación general a partir de:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2x+6y+3z-18=0$$

- O bien obtener un vector normal haciendo el producto vectorial de los dos vectores directores del plano y luego obtener la D imponiendo que la ecuación obtenida pase por uno de los puntos.

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2,\ 6,\ 3) \Rightarrow$$

$$\vec{n}_\pi \equiv (-2,\ 6,\ 3)$$

$$-2\cdot x + (6)\cdot y + (3)\cdot z + D = 0 \Rightarrow (-2)\cdot(0) + (6)\cdot(1) + (3)\cdot(4) + D = 0$$

$$(0) + (6) + (12) + D = 0 \Rightarrow 18 + D = 0 \Rightarrow D = -18$$

  - También podemos obtener de forma directa la ecuación a partir de que $D = \vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{OA} = (-2,\ 6,\ 3)\cdot(0,\ 1,\ 4) = -18$

En cualquier caso, se obtendría que la ecuación del plano ya simplificada es:

$$\pi \equiv -2x+6y+3z-18=0$$

Hallamos un punto genérico P_g de la recta r (que dependerá de su parámetro).

Podemos obtener la ecuación paramétrica de la recta de diferentes formas, en este caso hemos obtenido dos puntos de la recta de coordenadas

$$P1 = (0,\ 1,\ -3)\ P2 = (3,\ 0,\ -2) \Rightarrow \vec{u}_r = (3,\ -1,\ 1) \Rightarrow$$

una ecuación paramétrica de la recta r es $\begin{cases} x &=& 3t \\ y &=& 1-t \\ z &=& t-3 \end{cases}$ y obtenemos:

$$P_g = (3t,\ 1-t,\ t-3)$$

Por tanto:

$$d(\pi, P_g) = \frac{|(-2)\cdot(3t)+(6)\cdot(1-t)+(3)\cdot(t-3)+(-18)|}{\sqrt{(-2)^2+(6)^2+(3)^2}} = \frac{|9t+21|}{7} = 7 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -9t-21 &= 49 \\ -9t-21 &= -49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = & -\dfrac{70}{9} \\ t = & \dfrac{28}{9} \end{cases}$$

Si sustituimos los valores anteriores en el punto genérico de la recta r obtenemos que los dos puntos a la distancia pedida son:

$P\left(-\dfrac{70}{3}, \dfrac{79}{9}, -\dfrac{97}{9}\right)$ y $Q\left(\dfrac{28}{3}, -\dfrac{19}{9}, \dfrac{1}{9}\right)$