

Resolución de ecuaciones diofánticas lineales de n variables

La ecuación diofántica $a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ tiene solución si y solo si $d = \text{mcd}(a_0, a_1, \dots, a_n)$ es un divisor de b . En ese caso la ecuación tiene infinitas soluciones.

Problemas

1. Resuelve la ecuación diofántica

$$-7x_0 + 16x_1 + 22x_2 + 50x_3 = 35$$

Solución

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c} 7 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{c} 7 \\ 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow -7 = -7^1 \end{array} \quad \begin{array}{c} 16 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow 16 = 2^4 \quad \begin{array}{c} 22 \\ 11 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 11 \\ 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow 22 = 11^1 \cdot 2^1 \quad \begin{array}{c} 50 \\ 25 \\ 5 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow 50 = 2^1 \cdot 5^2 \quad \begin{array}{c} 35 \\ 7 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{c} 5 \\ 7 \\ 7 \end{array} \right. \Leftrightarrow 35 = 5^1 \cdot 7^1 \quad \Rightarrow \text{mcd}[-7, 16, 22, 50] = 1 \text{ que divide a } 35. \end{array}$$

Tiene solución, comencemos

Paso 1

Como

$$\text{mcd}[-7, 16, 22] = 1$$

Sea

$$-7x_0 + 16x_1 + 22x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_0 + 50x_3 = 35$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_0 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot k_0 + 1 \cdot x_3 = 50 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_0 = 1$ y $x_3 = 50$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \textcolor{blue}{5} \text{ } 0 \left| \begin{array}{c} \textcolor{blue}{1} \\ 50 \end{array} \right. \\ 0 \left| \begin{array}{c} 50 \\ 0 \end{array} \right. \Rightarrow 50 = 1 \times 50 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 50 veces la primera} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \textcolor{blue}{1} \\ -50 & 1 & \textcolor{blue}{0} \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_0 + (0) \cdot x_3 = 1 \\ (-50) \cdot k_0 + (1) \cdot x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (50) = 1 \\ (-50) \cdot (1) + (1) \cdot (50) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, 50) = 1$.

La primera igualdad de (1) la tenemos que multiplicar por $q=35$
 $(1) \cdot (1) + (0) \cdot (50) = 1 \Rightarrow 35 \cdot (1) \cdot (1) + 35 \cdot (0) \cdot (50) = 35 \cdot 1 \Rightarrow$

$$(35) \cdot (1) + (0) \cdot (50) = 35 \quad (2)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (1) por t_0

$$(-50t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (50) = 0 \quad (3)$$

Sumamos (2) a (3) sacando factor común:

$$(35 - 50t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (50) = 35$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_0 = 35 - 50t_0 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

Paso 2

Como

$$\text{mcd}[-7, 16] = 1$$

Sea

$$-7x_0 + 16x_1 = k_1$$

Tenemos la ecuación

$$k_1 + 22x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_1 + 22x_2 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_1 + 0 \cdot x_2 = 1 \\ 0 \cdot k_1 + 1 \cdot x_2 = 22 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_1 = 1$ y $x_2 = 22$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 22 \\ 0 & & \end{array}$$

$\Rightarrow 22 = 1 \times 22 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 22 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -22 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_1 + (0) \cdot x_2 = 1 \\ (-22) \cdot k_1 + (1) \cdot x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (22) = 1 \\ (-22) \cdot (1) + (1) \cdot (22) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, 22) = 1$.

La primera igualdad de (4) la tenemos que multiplicar por $q=k_0$
 $(1) \cdot (1) + (0) \cdot (22) = 1 \Rightarrow k_0 \cdot (1) \cdot (1) + k_0 \cdot (0) \cdot (22) = k_0 \cdot 1 \Rightarrow$

$$(k_0) \cdot (1) + (0) \cdot (22) = k_0 \quad (5)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (4) por t_1

$$(-22t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (22) = 0 \quad (6)$$

Sumamos (5) a (6) sacando factor común:

$$(k_0 - 22t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (22) = k_0$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_1 = k_0 - 22t_1 \\ x_2 = t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_0 = 35 - 50t_0$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_1 = -50t_0 - 22t_1 + 35 \\ x_2 = t_1 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$

Paso 3

Tenemos la ecuación

$$-7x_0 + 16x_1 = k_1$$

Partimos de la ecuación

$$-7x_0 + 16x_1 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = -7 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = 16 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = -7$ y $x_1 = 16$.

16. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

$16 = -7 \times -2 + 2 \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$-7 = 2 \times -4 + 1 \Rightarrow$ Sumamos a la primera fila 4 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$2 \mid 1$
 $0 \mid 2 \Rightarrow 2 = 1 \times 2 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 \\ -16 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (9) \cdot x_0 + (4) \cdot x_1 = 1 \\ (-16) \cdot x_0 + (-7) \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (9) \cdot (-7) + (4) \cdot (16) = 1 \\ (-16) \cdot (-7) + (-7) \cdot (16) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(-7, 16) = 1$.

La primera igualdad de (7) la tenemos que multiplicar por $q=k_1$

$$(9) \cdot (-7) + (4) \cdot (16) = 1 \Rightarrow k_1 \cdot (9) \cdot (-7) + k_1 \cdot (4) \cdot (16) = k_1 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(9k_1) \cdot (-7) + (4k_1) \cdot (16) = k_1 \quad (8)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (7) por t_2

$$(-16t_2) \cdot (-7) + (-7t_2) \cdot (16) = 0 \quad (9)$$

Sumamos (8) a (9) sacando factor común:

$$(9k_1 - 16t_2) \cdot (-7) + (4k_1 - 7t_2) \cdot (16) = k_1$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = 9k_1 - 16t_2 \\ x_1 = 4k_1 - 7t_2 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_1 = -50t_0 - 22t_1 + 35$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = -450t_0 - 198t_1 - 16t_2 + 315 \\ x_1 = -200t_0 - 88t_1 - 7t_2 + 140 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$

Por último, tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = -450t_0 - 198t_1 - 16t_2 + 315 \\ x_1 = -200t_0 - 88t_1 - 7t_2 + 140 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$



2. Resuelve la ecuación diofántica

$$-83x_0 + 26x_1 - 10x_2 = -77$$

Solución

$$\begin{array}{l|l} 83 & 83 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow -83 = -83^1 \quad \begin{array}{l|l} 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow 26 = 13^1 \cdot 2^1 \quad \begin{array}{l|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow -10 = -2^1 \cdot 5^1$$

$$\begin{array}{l|l} 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow -77 = -11^1 \cdot 7^1 \quad \Rightarrow \text{mcd}[-83, 26, -10] = 1 \text{ que divide a } -77. \text{ Tiene}$$

solución, comencemos

Paso 1

Como

$$\text{mcd}[-83, 26] = 1$$

Sea

$$-83x_0 + 26x_1 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_0 - 10x_2 = -77$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_0 + 0 \cdot x_2 = 1 \\ 0 \cdot k_0 + 1 \cdot x_2 = -10 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_0 = 1$ y $x_2 = -10$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

$-10 = 1 \times (-10) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 10 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_0 + (0) \cdot x_2 = 1 \\ (10) \cdot k_0 + (1) \cdot x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-10) = 1 \\ (10) \cdot (1) + (1) \cdot (-10) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -10) = 1$.

La primera igualdad de (10) la tenemos que multiplicar por $q=-77$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-10) = 1 \Rightarrow -77 \cdot (1) \cdot (1) + -77 \cdot (0) \cdot (-10) = -77 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-77) \cdot (1) + (0) \cdot (-10) = -77 \quad (11)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (10) por t_0

$$(10t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (-10) = 0 \quad (12)$$

Sumamos (11) a (12) sacando factor común:

$$(10t_0 - 77) \cdot (1) + (t_0) \cdot (-10) = -77$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_0 = 10t_0 - 77 \\ x_2 = t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

Paso 2

Tenemos la ecuación

$$-83x_0 + 26x_1 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$-83x_0 + 26x_1 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = -83 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = 26 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = -83$ y $x_1 = 26$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -83 \\ 0 & 1 & 26 \end{pmatrix}$$

$-83 = 26 \times -4 + 21 \Rightarrow$ Sumamos a la primera fila 4 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & & \end{array} \Rightarrow 26 = 21 \times 1 + 5 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 1 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 21 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & & \end{array} \Rightarrow 21 = 5 \times 4 + 1 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 4 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 16 & 1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 5 & 1 \\ \hline 0 & 5 \end{array} \Rightarrow 5 = 1 \times 5 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 5 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 16 & 1 \\ -26 & -83 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (5) \cdot x_0 + (16) \cdot x_1 & = 1 \\ (-26) \cdot x_0 + (-83) \cdot x_1 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5) \cdot (-83) + (16) \cdot (26) & = 1 \\ (-26) \cdot (-83) + (-83) \cdot (26) & = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(-83, 26) = 1$.

La primera igualdad de (13) la tenemos que multiplicar por $q=k_0$

$$(5) \cdot (-83) + (16) \cdot (26) = 1 \Rightarrow k_0 \cdot (5) \cdot (-83) + k_0 \cdot (16) \cdot (26) = k_0 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(5k_0) \cdot (-83) + (16k_0) \cdot (26) = k_0 \quad (14)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (13) por t_1

$$(-26t_1) \cdot (-83) + (-83t_1) \cdot (26) = 0 \quad (15)$$

Sumamos (14) a (15) sacando factor común:

$$(5k_0 - 26t_1) \cdot (-83) + (16k_0 - 83t_1) \cdot (26) = k_0$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = 5k_0 - 26t_1 \\ x_1 = 16k_0 - 83t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_0 = 10t_0 - 77$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = 50t_0 - 26t_1 - 385 \\ x_1 = 160t_0 - 83t_1 - 1232 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$

Por último, tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = 50t_0 - 26t_1 - 385 \\ x_1 = 160t_0 - 83t_1 - 1232 \\ x_2 = t_0 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$



3. Resuelve la ecuación diofántica

$$7x_0 + 63x_1 - 54x_2 - 85x_3 + 7x_4 = -83$$

Solución

$$\begin{array}{c|c} 7 & 7 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow 7 = 7^1 \quad \begin{array}{c|c} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow 63 = 3^2 \cdot 7^1 \quad \begin{array}{c|c} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow -54 = -2^1 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{l|l} 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow -85 = -17^1 \cdot 5^1 \quad \begin{array}{l|l} 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow 7 = 7^1 \quad \begin{array}{l|l} 83 & 83 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow -83 = -83^1$$

$\Rightarrow \text{mcd}[7, 63, -54, -85, 7] = 1$ que divide a -83 . Tiene solución, comencemos

Paso 1

Como

$$\text{mcd}[7, 63, -54, -85] = 1$$

Sea

$$7x_0 + 63x_1 - 54x_2 - 85x_3 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_0 + 7x_4 = -83$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_0 + 0 \cdot x_4 = 1 \\ 0 \cdot k_0 + 1 \cdot x_4 = 7 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_0 = 1$ y $x_4 = 7$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{array} \Rightarrow 7 = 1 \times 7 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 7 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_0 + (0) \cdot x_4 = 1 \\ (-7) \cdot k_0 + (1) \cdot x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (7) = 1 \\ (-7) \cdot (1) + (1) \cdot (7) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, 7) = 1$.

La primera igualdad de (16) la tenemos que multiplicar por $q=-83$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (7) = 1 \Rightarrow -83 \cdot (1) \cdot (1) + -83 \cdot (0) \cdot (7) = -83 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-83) \cdot (1) + (0) \cdot (7) = -83 \quad (17)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (16) por t_0

$$(-7t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (7) = 0 \quad (18)$$

Sumamos (17) a (18) sacando factor común:

$$(-7t_0 - 83) \cdot (1) + (t_0) \cdot (7) = -83$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_0 = -7t_0 - 83 \\ x_4 = t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

Paso 2

Como

$$\text{mcd}[7, 63, -54] = 1$$

Sea

$$7x_0 + 63x_1 - 54x_2 = k_1$$

Tenemos la ecuación

$$k_1 - 85x_3 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_1 - 85x_3 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_1 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot k_1 + 1 \cdot x_3 = -85 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_1 = 1$ y $x_3 = -85$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -85 \end{pmatrix}$$

$-85 = 1 \times (-85) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 85 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 85 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_1 + (0) \cdot x_3 = 1 \\ (85) \cdot k_1 + (1) \cdot x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-85) = 1 \\ (85) \cdot (1) + (1) \cdot (-85) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -85) = 1$.

La primera igualdad de (19) la tenemos que multiplicar por $q=k_0$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-85) = 1 \Rightarrow k_0 \cdot (1) \cdot (1) + k_0 \cdot (0) \cdot (-85) = k_0 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(k_0) \cdot (1) + (0) \cdot (-85) = k_0 \quad (20)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (19) por t_1

$$(85t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (-85) = 0 \quad (21)$$

Sumamos (20) a (21) sacando factor común:

$$(k_0 + 85t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (-85) = k_0$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_1 = k_0 + 85t_1 \\ x_3 = t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_0 = -7t_0 - 83$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_2 = -7t_0 + 85t_1 - 83 \\ x_3 = t_1 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$

Paso 3

Como

$$\text{mcd}[7, 63] = 7$$

Sea

$$7x_0 + 63x_1 = 7k_2$$

Tenemos la ecuación

$$7k_2 - 54x_2 = k_1$$

Partimos de la ecuación

$$7k_2 - 54x_2 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_2 + 0 \cdot x_2 = 7 \\ 0 \cdot k_2 + 1 \cdot x_2 = -54 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_2 = 7$ y $x_2 = -54$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -54 \end{pmatrix}$$

$-54 = 7 \times -8 + 2 \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 8 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$7 \mid 2$
 $1 \mid 3 \Rightarrow 7 = 2 \times 3 + 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -23 & -3 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$2 \mid 1$
 $0 \mid 2 \Rightarrow 2 = 1 \times 2 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} -23 & -3 & 1 \\ 54 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (-23) \cdot k_2 + (-3) \cdot x_2 = 1 \\ (54) \cdot k_2 + (7) \cdot x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-23) \cdot (7) + (-3) \cdot (-54) = 1 \\ (54) \cdot (7) + (7) \cdot (-54) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(7, -54) = 1$.

La primera igualdad de (22) la tenemos que multiplicar por $q=k_1$

$$(-23) \cdot (7) + (-3) \cdot (-54) = 1 \Rightarrow k_1 \cdot (-23) \cdot (7) + k_1 \cdot (-3) \cdot (-54) = k_1 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-23k_1) \cdot (7) + (-3k_1) \cdot (-54) = k_1 \quad (23)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (22) por t_2

$$(54t_2) \cdot (7) + (7t_2) \cdot (-54) = 0 \quad (24)$$

Sumamos (23) a (24) sacando factor común:

$$(-23k_1 + 54t_2) \cdot (7) + (-3k_1 + 7t_2) \cdot (-54) = k_1$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_2 = -23k_1 + 54t_2 \\ x_2 = -3k_1 + 7t_2 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_1 = -7t_0 + 85t_1 - 83$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_1 = 161t_0 - 1955t_1 + 54t_2 + 1909 \\ x_2 = 21t_0 - 255t_1 + 7t_2 + 249 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$

Paso 4

Tenemos la ecuación

$$7x_0 + 63x_1 = 7k_2$$

Partimos de la ecuación

$$7x_0 + 63x_1 = 7$$

Dividimos todos los coeficientes por 7 obteniendo la siguiente ecuación:

$$x_0 + 9x_1 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = 1 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = 9 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = 1$ y $x_1 = 9$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$9 \mid 1$
 $0 \mid 9 \Rightarrow 9 = 1 \times 9 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 9 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot x_0 + (0) \cdot x_1 = 1 \\ (-9) \cdot x_0 + (1) \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (9) = 1 \\ (-9) \cdot (1) + (1) \cdot (9) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, 9) = 1$.

La primera igualdad de (25) la tenemos que multiplicar por $q=7k_2$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (9) = 1 \Rightarrow 7k_2 \cdot (1) \cdot (1) + 7k_2 \cdot (0) \cdot (9) = 7k_2 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(7k_2) \cdot (1) + (0) \cdot (9) = 7k_2 \quad (26)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (25) por t_3

$$(-9t_3) \cdot (1) + (t_3) \cdot (9) = 0 \quad (27)$$

Sumamos (26) a (27) sacando factor común:

$$(7k_2 - 9t_3) \cdot (1) + (t_3) \cdot (9) = 7k_2$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = 7k_2 - 9t_3 \\ x_1 = t_3 \end{cases} \quad t_3 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_2 = 161t_0 - 1955t_1 + 54t_2 + 1909$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = 161t_0 - 1955t_1 + 54t_2 - 9t_3 + 1909 \\ x_1 = t_3 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$$

Por último, tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = 161t_0 - 1955t_1 + 54t_2 - 9t_3 + 1909 \\ x_1 = t_3 \\ x_2 = 21t_0 - 255t_1 + 7t_2 + 249 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_0 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$$



4. Resuelve la ecuación diofántica

$$-12x_0 - 2x_1 = 95$$

Solución

$$\begin{array}{l|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -12 = -2^2 \cdot 3^1 \quad \begin{array}{l|l} 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -2 = -2^1 \quad \begin{array}{l|l} 95 & 5 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow 95 = 19^1 \cdot 5^1$$

$$\Rightarrow \text{mcd}[-12, -2] = 2$$

$$\begin{array}{l|l} 95 & 2 \\ 15 & 47 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow 95 = 2 \times 47 + 1$$

No tiene solución ya que el mcd de los coeficientes no divide al término independiente

5. Resuelve la ecuación diofántica

$$23x_0 - 53x_1 - 98x_2 - 49x_3 = -82$$

Solución

$$\begin{array}{l|l} 23 & 23 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow 23 = 23^1 \quad \begin{array}{l|l} 53 & 53 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -53 = -53^1 \quad \begin{array}{l|l} 98 & 2 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -98 = -2^1 \cdot 7^2$$

$$\begin{array}{l|l} 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -49 = -7^2 \quad \begin{array}{l|l} 82 & 2 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -82 = -2^1 \cdot 41^1 \quad \Rightarrow \text{mcd}[23, -53, -98, -49] =$$

1 que divide a -82. Tiene solución, comencemos

Paso 1

Como

$$\text{mcd}[23, -53, -98] = 1$$

Sea

$$23x_0 - 53x_1 - 98x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_0 - 49x_3 = -82$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_0 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot k_0 + 1 \cdot x_3 = -49 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_0 = 1$ y $x_3 = -49$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -49 \end{pmatrix}$$

$-49 = 1 \times (-49) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 49 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 49 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_0 + (0) \cdot x_3 &= 1 \\ (49) \cdot k_0 + (1) \cdot x_3 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-49) &= 1 \\ (49) \cdot (1) + (1) \cdot (-49) &= 0 \end{cases} \quad (28)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -49) = 1$.

La primera igualdad de (28) la tenemos que multiplicar por $q=-82$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-49) = 1 \Rightarrow -82 \cdot (1) \cdot (1) + -82 \cdot (0) \cdot (-49) = -82 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-82) \cdot (1) + (0) \cdot (-49) = -82 \quad (29)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (28) por t_0

$$(49t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (-49) = 0 \quad (30)$$

Sumamos (29) a (30) sacando factor común:

$$(49t_0 - 82) \cdot (1) + (t_0) \cdot (-49) = -82$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_0 = 49t_0 - 82 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

Paso 2

Como

$$\text{mcd}[23, -53] = 1$$

Sea

$$23x_0 - 53x_1 = k_1$$

Tenemos la ecuación

$$k_1 - 98x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_1 - 98x_2 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_1 + 0 \cdot x_2 &= 1 \\ 0 \cdot k_1 + 1 \cdot x_2 &= -98 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_1 = 1$ y $x_2 = -98$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -98 \end{pmatrix}$$

$-98 = 1 \times (-98) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 98 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 98 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_1 + (0) \cdot x_2 &= 1 \\ (98) \cdot k_1 + (1) \cdot x_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-98) &= 1 \\ (98) \cdot (1) + (1) \cdot (-98) &= 0 \end{cases} \quad (31)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -98) = 1$.

La primera igualdad de (31) la tenemos que multiplicar por $q=k_0$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-98) = 1 \Rightarrow k_0 \cdot (1) \cdot (1) + k_0 \cdot (0) \cdot (-98) = k_0 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(k_0) \cdot (1) + (0) \cdot (-98) = k_0 \quad (32)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (31) por t_1

$$(98t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (-98) = 0 \quad (33)$$

Sumamos (32) a (33) sacando factor común:

$$(k_0 + 98t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (-98) = k_0$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_1 = k_0 + 98t_1 \\ x_2 = t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_0 = 49t_0 - 82$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_1 = 49t_0 + 98t_1 - 82 \\ x_2 = t_1 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$

Paso 3

Tenemos la ecuación

$$23x_0 - 53x_1 = k_1$$

Partimos de la ecuación

$$23x_0 - 53x_1 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 &= 23 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 &= -53 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = 23$ y $x_1 = -53$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 23 \\ 0 & 1 & -53 \end{pmatrix}$$

$-53 = 23 \times -3 + 16 \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 3 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 23 \\ 3 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 16 \\ 7 & 1 & 7 \end{array} \Rightarrow 23 = 16 \times 1 + 7 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{array} \Rightarrow 16 = 7 \times 2 + 2 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{array} \Rightarrow 7 = 2 \times 3 + 1 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 3 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} -23 & -10 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 1 \times 2 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 2 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} -23 & -10 & 1 \\ 53 & 23 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (-23) \cdot x_0 + (-10) \cdot x_1 = 1 \\ (53) \cdot x_0 + (23) \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-23) \cdot (23) + (-10) \cdot (-53) = 1 \\ (53) \cdot (23) + (23) \cdot (-53) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(23, -53) = 1$.

La primera igualdad de (34) la tenemos que multiplicar por $q=k_1$

$$(-23) \cdot (23) + (-10) \cdot (-53) = 1 \Rightarrow k_1 \cdot (-23) \cdot (23) + k_1 \cdot (-10) \cdot (-53) = k_1 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-23k_1) \cdot (23) + (-10k_1) \cdot (-53) = k_1 \quad (35)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (34) por t_2

$$(53t_2) \cdot (23) + (23t_2) \cdot (-53) = 0 \quad (36)$$

Sumamos (35) a (36) sacando factor común:

$$(-23k_1 + 53t_2) \cdot (23) + (-10k_1 + 23t_2) \cdot (-53) = k_1$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = -23k_1 + 53t_2 \\ x_1 = -10k_1 + 23t_2 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_1 = 49t_0 + 98t_1 - 82$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = -1127t_0 - 2254t_1 + 53t_2 + 1886 \\ x_1 = -490t_0 - 980t_1 + 23t_2 + 820 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$

Por último, tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = -1127t_0 - 2254t_1 + 53t_2 + 1886 \\ x_1 = -490t_0 - 980t_1 + 23t_2 + 820 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$



6. Resuelve la ecuación diofántica

$$62x_0 - 48x_1 + 31x_2 - 99x_3 = -16$$

Solución

$$\begin{array}{lcl}
\begin{array}{c|c} 62 & 2 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array} & \Leftrightarrow 62 = 2^1 \cdot 31^1 & \\
\begin{array}{c|c} 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} & \Leftrightarrow -99 = -11^1 \cdot 3^2 & \\
\begin{array}{c|c} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} & \Leftrightarrow -48 = -2^4 \cdot 3^1 & \\
\begin{array}{c|c} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} & \Leftrightarrow -16 = -2^4 & \Rightarrow \text{mcd}[62, -48, 31, -99] = 1 \\
\begin{array}{c|c} 31 & 31 \\ 1 & \end{array} & \Leftrightarrow 31 = 31^1 &
\end{array}$$

que divide a -16 . Tiene solución, comencemos

Paso 1

Como

$$\text{mcd}[62, -48, 31] = 1$$

Sea

$$62x_0 - 48x_1 + 31x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_0 - 99x_3 = -16$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_0 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot k_0 + 1 \cdot x_3 = -99 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_0 = 1$ y $x_3 = -99$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -99 \end{pmatrix}$$

$-99 = 1 \times (-99) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 99 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 99 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} (1) \cdot k_0 + (0) \cdot x_3 = 1 \\ (99) \cdot k_0 + (1) \cdot x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\
& \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-99) = 1 \\ (99) \cdot (1) + (1) \cdot (-99) = 0 \end{cases} \quad (37)
\end{aligned}$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -99) = 1$.

La primera igualdad de (37) la tenemos que multiplicar por $q=-16$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-99) = 1 \Rightarrow -16 \cdot (1) \cdot (1) + -16 \cdot (0) \cdot (-99) = -16 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-16) \cdot (1) + (0) \cdot (-99) = -16 \quad (38)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (37) por t_0

$$(99t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (-99) = 0 \quad (39)$$

Sumamos (38) a (39) sacando factor común:

$$(99t_0 - 16) \cdot (1) + (t_0) \cdot (-99) = -16$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_0 = 99t_0 - 16 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

Paso 2

Como

$$\text{mcd}[62, -48] = 2$$

Sea

$$62x_0 - 48x_1 = 2k_1$$

Tenemos la ecuación

$$2k_1 + 31x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$2k_1 + 31x_2 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_1 + 0 \cdot x_2 = 2 \\ 0 \cdot k_1 + 1 \cdot x_2 = 31 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_1 = 2$ y $x_2 = 31$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 31 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 15 \\ 1 & & \end{array} \Rightarrow 31 = 2 \times 15 + 1 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 15 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -15 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 2 & & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow 2 = 1 \times 2 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 2 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 31 & -2 & 0 \\ -15 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (-15) \cdot k_1 + (1) \cdot x_2 = 1 \\ (31) \cdot k_1 + (-2) \cdot x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-15) \cdot (2) + (1) \cdot (31) = 1 \\ (31) \cdot (2) + (-2) \cdot (31) = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(2, 31) = 1$.

La primera igualdad de (40) la tenemos que multiplicar por $q=k_0$

$$(-15) \cdot (2) + (1) \cdot (31) = 1 \Rightarrow k_0 \cdot (-15) \cdot (2) + k_0 \cdot (1) \cdot (31) = k_0 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-15k_0) \cdot (2) + (k_0) \cdot (31) = k_0 \quad (41)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (40) por t_1

$$(31t_1) \cdot (2) + (-2t_1) \cdot (31) = 0 \quad (42)$$

Sumamos (41) a (42) sacando factor común:

$$(-15k_0 + 31t_1) \cdot (2) + (k_0 - 2t_1) \cdot (31) = k_0$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_1 = -15k_0 + 31t_1 \\ x_2 = k_0 - 2t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_0 = 99t_0 - 16$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_1 = -1485t_0 + 31t_1 + 240 \\ x_2 = 99t_0 - 2t_1 - 16 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$

Paso 3

Tenemos la ecuación

$$62x_0 - 48x_1 = 2k_1$$

Partimos de la ecuación

$$62x_0 - 48x_1 = 2$$

Dividimos todos los coeficientes por 2 obteniendo la siguiente ecuación:

$$31x_0 - 24x_1 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = 31 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = -24 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = 31$ y $x_1 = -24$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 31 \\ 0 & 1 & -24 \end{pmatrix}$$

$31 = -24 \times -1 + 7 \Rightarrow$ Sumamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -24 \end{pmatrix}$$

$-24 = 7 \times -4 + 4 \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 4 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{l|l} 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{array} \Rightarrow 7 = 4 \times 1 + 3 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{l|l} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 4 = 3 \times 1 + 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{l|l} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{array} \Rightarrow 3 = 1 \times 3 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -24 & -31 & 0 \\ 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (7) \cdot x_0 + (9) \cdot x_1 & = 1 \\ (-24) \cdot x_0 + (-31) \cdot x_1 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (7) \cdot (31) + (9) \cdot (-24) & = 1 \\ (-24) \cdot (31) + (-31) \cdot (-24) & = 0 \end{cases} \quad (43)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(31, -24) = 1$.

La primera igualdad de (43) la tenemos que multiplicar por $q=2k_1$

$$(7) \cdot (31) + (9) \cdot (-24) = 1 \Rightarrow 2k_1 \cdot (7) \cdot (31) + 2k_1 \cdot (9) \cdot (-24) = 2k_1 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(14k_1) \cdot (31) + (18k_1) \cdot (-24) = 2k_1 \quad (44)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (43) por t_2

$$(-24t_2) \cdot (31) + (-31t_2) \cdot (-24) = 0 \quad (45)$$

Sumamos (44) a (45) sacando factor común:

$$(14k_1 - 24t_2) \cdot (31) + (18k_1 - 31t_2) \cdot (-24) = 2k_1$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = 14k_1 - 24t_2 \\ x_1 = 18k_1 - 31t_2 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_1 = -1485t_0 + 31t_1 + 240$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = -10395t_0 + 217t_1 - 24t_2 + 1680 \\ x_1 = -13365t_0 + 279t_1 - 31t_2 + 2160 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$

Por último, tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = -10395t_0 + 217t_1 - 24t_2 + 1680 \\ x_1 = -13365t_0 + 279t_1 - 31t_2 + 2160 \\ x_2 = 99t_0 - 2t_1 - 16 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$



7. Resuelve la ecuación diofántica

$$66x_0 - 86x_1 + 79x_2 + 56x_3 = -16$$

Solución

$$\begin{array}{l|l} 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow 66 = 11^1 \cdot 2^1 \cdot 3^1 \quad \begin{array}{l|l} 86 & 2 \\ 43 & 43 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -86 = -2^1 \cdot 43^1 \quad \begin{array}{l|l} 79 & 79 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow 79 = 79^1$$

$$\begin{array}{l|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow 56 = 2^3 \cdot 7^1 \quad \begin{array}{l|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -16 = -2^4 \quad \Rightarrow \text{mcd}[66, -86, 79, 56] = 1 \text{ que}$$

divide a -16 . Tiene solución, comencemos

Paso 1

Como

$$\text{mcd}[66, -86, 79] = 1$$

Sea

$$66x_0 - 86x_1 + 79x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_0 + 56x_3 = -16$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_0 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot k_0 + 1 \cdot x_3 = 56 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_0 = 1$ y $x_3 = 56$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 56 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 56 \\ 0 & & \end{array}$$

$\Rightarrow 56 = 1 \times 56 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 56 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -56 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_0 + (0) \cdot x_3 = 1 \\ (-56) \cdot k_0 + (1) \cdot x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (56) = 1 \\ (-56) \cdot (1) + (1) \cdot (56) = 0 \end{cases} \quad (46)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, 56) = 1$.

La primera igualdad de (46) la tenemos que multiplicar por $q=-16$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (56) = 1 \Rightarrow -16 \cdot (1) \cdot (1) + -16 \cdot (0) \cdot (56) = -16 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-16) \cdot (1) + (0) \cdot (56) = -16 \quad (47)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (46) por t_0

$$(-56t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (56) = 0 \quad (48)$$

Sumamos (47) a (48) sacando factor común:

$$(-56t_0 - 16) \cdot (1) + (t_0) \cdot (56) = -16$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_0 = -56t_0 - 16 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

Paso 2

Como

$$\text{mcd}[66, -86] = 2$$

Sea

$$66x_0 - 86x_1 = 2k_1$$

Tenemos la ecuación

$$2k_1 + 79x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$2k_1 + 79x_2 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_1 + 0 \cdot x_2 = 2 \\ 0 \cdot k_1 + 1 \cdot x_2 = 79 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_1 = 2$ y $x_2 = 79$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 79 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 79 & 2 \\ 19 & 39 \\ 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow 79 = 2 \times 39 + 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 39 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -39 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array}$$

$\Rightarrow 2 = 1 \times 2 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 79 & -2 & 0 \\ -39 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (-39) \cdot k_1 + (1) \cdot x_2 = 1 \\ (79) \cdot k_1 + (-2) \cdot x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-39) \cdot (2) + (1) \cdot (79) = 1 \\ (79) \cdot (2) + (-2) \cdot (79) = 0 \end{cases} \quad (49)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(2, 79) = 1$.

La primera igualdad de (49) la tenemos que multiplicar por $q=k_0$

$$(-39) \cdot (2) + (1) \cdot (79) = 1 \Rightarrow k_0 \cdot (-39) \cdot (2) + k_0 \cdot (1) \cdot (79) = k_0 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-39k_0) \cdot (2) + (k_0) \cdot (79) = k_0 \quad (50)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (49) por t_1

$$(79t_1) \cdot (2) + (-2t_1) \cdot (79) = 0 \quad (51)$$

Sumamos (50) a (51) sacando factor común:

$$(-39k_0 + 79t_1) \cdot (2) + (k_0 - 2t_1) \cdot (79) = k_0$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_1 = -39k_0 + 79t_1 \\ x_2 = k_0 - 2t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_0 = -56t_0 - 16$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_1 = 2184t_0 + 79t_1 + 624 \\ x_2 = -56t_0 - 2t_1 - 16 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$

Paso 3

Tenemos la ecuación

$$66x_0 - 86x_1 = 2k_1$$

Partimos de la ecuación

$$66x_0 - 86x_1 = 2$$

Dividimos todos los coeficientes por 2 obteniendo la siguiente ecuación:

$$33x_0 - 43x_1 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = 33 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = -43 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = 33$ y $x_1 = -43$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 33 \\ 0 & 1 & -43 \end{pmatrix}$$

$-43 = 33 \times -2 + 23 \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 33 \\ 2 & 1 & 23 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 23 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow 33 = 23 \times 1 + 10 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 10 \\ 2 & 1 & 23 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 3 \end{array} \Rightarrow 23 = 10 \times 2 + 3 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 10 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{array} \Rightarrow 10 = 3 \times 3 + 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -13 & -10 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \Rightarrow 3 = 1 \times 3 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 3 veces la primera

$$\begin{pmatrix} -13 & -10 & 1 \\ 43 & 33 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (-13) \cdot x_0 + (-10) \cdot x_1 = 1 \\ (43) \cdot x_0 + (33) \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-13) \cdot (33) + (-10) \cdot (-43) = 1 \\ (43) \cdot (33) + (33) \cdot (-43) = 0 \end{cases} \quad (52)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(33, -43) = 1$.

La primera igualdad de (52) la tenemos que multiplicar por $q=2k_1$

$$(-13) \cdot (33) + (-10) \cdot (-43) = 1 \Rightarrow 2k_1 \cdot (-13) \cdot (33) + 2k_1 \cdot (-10) \cdot (-43) = 2k_1 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-26k_1) \cdot (33) + (-20k_1) \cdot (-43) = 2k_1 \quad (53)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (52) por t_2

$$(43t_2) \cdot (33) + (33t_2) \cdot (-43) = 0 \quad (54)$$

Sumamos (53) a (54) sacando factor común:

$$(-26k_1 + 43t_2) \cdot (33) + (-20k_1 + 33t_2) \cdot (-43) = 2k_1$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = -26k_1 + 43t_2 \\ x_1 = -20k_1 + 33t_2 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_1 = 2184t_0 + 79t_1 + 624$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = -28392t_0 - 1027t_1 + 43t_2 - 8112 \\ x_1 = -21840t_0 - 790t_1 + 33t_2 - 6240 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$

Por último, tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = -28392t_0 - 1027t_1 + 43t_2 - 8112 \\ x_1 = -21840t_0 - 790t_1 + 33t_2 - 6240 \\ x_2 = -56t_0 - 2t_1 - 16 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$



8. Resuelve la ecuación diofántica

$$-88x_0 - 92x_1 - 28x_2 + 64x_3 = 64$$

Solución

Dividimos todos los coeficientes por 4 obteniendo la siguiente ecuación:

$$-22x_0 - 23x_1 - 7x_2 + 16x_3 = 16$$

$$\begin{array}{l|l} 22 & 2 \\ 11 & 11 \Leftrightarrow -22 = -11^1 \cdot 2^1 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 23 & 23 \\ 1 & 1 \Leftrightarrow -23 = -23^1 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 7 & 7 \\ 1 & 1 \Leftrightarrow -7 = -7^1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \Leftrightarrow 16 = 2^4 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \Leftrightarrow 16 = 2^4 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow \text{mcd}[-22, -23, -7, 16] = 1 \text{ que divide}$$

a 16. Tiene solución, comencemos

Paso 1

Como

$$\text{mcd}[-22, -23, -7] = 1$$

Sea

$$-22x_0 - 23x_1 - 7x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_0 + 16x_3 = 16$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_0 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot k_0 + 1 \cdot x_3 = 16 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_0 = 1$ y $x_3 = 16$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 16 & 1 \\ 0 & 1 & 16 \\ 0 & & \end{array}$$

$\Rightarrow 16 = 1 \times 16 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 16 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -16 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_0 + (0) \cdot x_3 = 1 \\ (-16) \cdot k_0 + (1) \cdot x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (16) = 1 \\ (-16) \cdot (1) + (1) \cdot (16) = 0 \end{cases} \quad (55)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, 16) = 1$.

La primera igualdad de (55) la tenemos que multiplicar por $q=16$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (16) = 1 \Rightarrow 16 \cdot (1) \cdot (1) + 16 \cdot (0) \cdot (16) = 16 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(16) \cdot (1) + (0) \cdot (16) = 16 \quad (56)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (55) por t_0

$$(-16t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (16) = 0 \quad (57)$$

Sumamos (56) a (57) sacando factor común:

$$(16 - 16t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (16) = 16$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_0 = 16 - 16t_0 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

Paso 2

Como

$$\text{mcd}[-22, -23] = 1$$

Sea

$$-22x_0 - 23x_1 = k_1$$

Tenemos la ecuación

$$k_1 - 7x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_1 - 7x_2 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_1 + 0 \cdot x_2 = 1 \\ 0 \cdot k_1 + 1 \cdot x_2 = -7 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_1 = 1$ y $x_2 = -7$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$-7 = 1 \times (-7) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 7 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_1 + (0) \cdot x_2 = 1 \\ (7) \cdot k_1 + (1) \cdot x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-7) = 1 \\ (7) \cdot (1) + (1) \cdot (-7) = 0 \end{cases} \quad (58)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -7) = 1$.

La primera igualdad de (58) la tenemos que multiplicar por $q=k_0$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-7) = 1 \Rightarrow k_0 \cdot (1) \cdot (1) + k_0 \cdot (0) \cdot (-7) = k_0 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(k_0) \cdot (1) + (0) \cdot (-7) = k_0 \quad (59)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (58) por t_1

$$(7t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (-7) = 0 \quad (60)$$

Sumamos (59) a (60) sacando factor común:

$$(k_0 + 7t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (-7) = k_0$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_1 = k_0 + 7t_1 \\ x_2 = t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_0 = 16 - 16t_0$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_1 = -16t_0 + 7t_1 + 16 \\ x_2 = t_1 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$

Paso 3

Tenemos la ecuación

$$-22x_0 - 23x_1 = k_1$$

Partimos de la ecuación

$$-22x_0 - 23x_1 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = -22 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = -23 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = -22$ y $x_1 = -23$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -22 \\ 0 & 1 & -23 \end{pmatrix}$$

$-23 = -22 \times 2 + 21 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -22 \\ -2 & 1 & 21 \end{pmatrix}$$

$-22 = 21 \times -2 + 20 \Rightarrow$ Sumamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 20 \\ -2 & 1 & 21 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 21 \end{array} \Rightarrow 21 = 20 \times 1 + 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 20 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow 20 = 1 \times 20 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 20 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -23 & 22 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot x_0 + (-1) \cdot x_1 & = 1 \\ (-23) \cdot x_0 + (22) \cdot x_1 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (-22) + (-1) \cdot (-23) & = 1 \\ (-23) \cdot (-22) + (22) \cdot (-23) & = 0 \end{cases} \quad (61)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(-22, -23) = 1$.

La primera igualdad de (61) la tenemos que multiplicar por $q=k_1$

$$(1) \cdot (-22) + (-1) \cdot (-23) = 1 \Rightarrow k_1 \cdot (1) \cdot (-22) + k_1 \cdot (-1) \cdot (-23) = k_1 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(k_1) \cdot (-22) + (-k_1) \cdot (-23) = k_1 \quad (62)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (61) por t_2

$$(-23t_2) \cdot (-22) + (22t_2) \cdot (-23) = 0 \quad (63)$$

Sumamos (62) a (63) sacando factor común:

$$(k_1 - 23t_2) \cdot (-22) + (-k_1 + 22t_2) \cdot (-23) = k_1$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = k_1 - 23t_2 \\ x_1 = -k_1 + 22t_2 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_1 = -16t_0 + 7t_1 + 16$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = -16t_0 + 7t_1 - 23t_2 + 16 \\ x_1 = 16t_0 - 7t_1 + 22t_2 - 16 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$

Por último, tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = -16t_0 + 7t_1 - 23t_2 + 16 \\ x_1 = 16t_0 - 7t_1 + 22t_2 - 16 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$



9. Resuelve la ecuación diofántica

$$63x_0 - 16x_1 - 26x_2 - 59x_3 - 22x_4 = 81$$

Solución

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c|c} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow 63 = 3^2 \cdot 7^1 \\ \begin{array}{c|c} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow -16 = -2^4 \\ \begin{array}{c|c} 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow -26 = -13^1 \cdot 2^1 \\ \begin{array}{c|c} 59 & 59 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow -59 = -59^1 \\ \begin{array}{c|c} 22 & 2 \\ 11 & 11 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow -22 = -11^1 \cdot 2^1 \\ \begin{array}{c|c} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow 81 = 3^4 \end{array}$$

$\Rightarrow \text{mcd}[63, -16, -26, -59, -22] = 1$ que divide a 81. Tiene solución, comencemos

Paso 1

Como

$$\text{mcd}[63, -16, -26, -59] = 1$$

Sea

$$63x_0 - 16x_1 - 26x_2 - 59x_3 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_0 - 22x_4 = 81$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_0 + 0 \cdot x_4 = 1 \\ 0 \cdot k_0 + 1 \cdot x_4 = -22 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_0 = 1$ y $x_4 = -22$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -22 \end{pmatrix}$$

$-22 = 1 \times (-22) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 22 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 22 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_0 + (0) \cdot x_4 = 1 \\ (22) \cdot k_0 + (1) \cdot x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-22) = 1 \\ (22) \cdot (1) + (1) \cdot (-22) = 0 \end{cases} \quad (64)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -22) = 1$.

La primera igualdad de (64) la tenemos que multiplicar por $q=81$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-22) = 1 \Rightarrow 81 \cdot (1) \cdot (1) + 81 \cdot (0) \cdot (-22) = 81 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(81) \cdot (1) + (0) \cdot (-22) = 81 \quad (65)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (64) por t_0

$$(22t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (-22) = 0 \quad (66)$$

Sumamos (65) a (66) sacando factor común:

$$(22t_0 + 81) \cdot (1) + (t_0) \cdot (-22) = 81$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_0 = 22t_0 + 81 \\ x_4 = t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

Paso 2

Como

$$\text{mcd}[63, -16, -26] = 1$$

Sea

$$63x_0 - 16x_1 - 26x_2 = k_1$$

Tenemos la ecuación

$$k_1 - 59x_3 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_1 - 59x_3 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_1 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot k_1 + 1 \cdot x_3 = -59 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_1 = 1$ y $x_3 = -59$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -59 \end{pmatrix}$$

$-59 = 1 \times (-59) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 59 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 59 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (1) \cdot k_1 + (0) \cdot x_3 = 1 \\ (59) \cdot k_1 + (1) \cdot x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-59) = 1 \\ (59) \cdot (1) + (1) \cdot (-59) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (67)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -59) = 1$.

La primera igualdad de (67) la tenemos que multiplicar por $q=k_0$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-59) = 1 \Rightarrow k_0 \cdot (1) \cdot (1) + k_0 \cdot (0) \cdot (-59) = k_0 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(k_0) \cdot (1) + (0) \cdot (-59) = k_0 \quad (68)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (67) por t_1

$$(59t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (-59) = 0 \quad (69)$$

Sumamos (68) a (69) sacando factor común:

$$(k_0 + 59t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (-59) = k_0$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_1 = k_0 + 59t_1 \\ x_3 = t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_0 = 22t_0 + 81$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_2 = 22t_0 + 59t_1 + 81 \\ x_3 = t_1 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$

Paso 3

Como

$$\text{mcd}[63, -16] = 1$$

Sea

$$63x_0 - 16x_1 = k_2$$

Tenemos la ecuación

$$k_2 - 26x_2 = k_1$$

Partimos de la ecuación

$$k_2 - 26x_2 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_2 + 0 \cdot x_2 = 1 \\ 0 \cdot k_2 + 1 \cdot x_2 = -26 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_2 = 1$ y $x_2 = -26$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -26 \end{pmatrix}$$

$-26 = 1 \times (-26) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 26 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (1) \cdot k_2 + (0) \cdot x_2 = 1 \\ (26) \cdot k_2 + (1) \cdot x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-26) = 1 \\ (26) \cdot (1) + (1) \cdot (-26) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (70)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -26) = 1$.

La primera igualdad de (70) la tenemos que multiplicar por $q=k_1$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-26) = 1 \Rightarrow k_1 \cdot (1) \cdot (1) + k_1 \cdot (0) \cdot (-26) = k_1 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(k_1) \cdot (1) + (0) \cdot (-26) = k_1 \quad (71)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (70) por t_2

$$(26t_2) \cdot (1) + (t_2) \cdot (-26) = 0 \quad (72)$$

Sumamos (71) a (72) sacando factor común:

$$(k_1 + 26t_2) \cdot (1) + (t_2) \cdot (-26) = k_1$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_2 = k_1 + 26t_2 \\ x_2 = t_2 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_1 = 22t_0 + 59t_1 + 81$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_1 = 22t_0 + 59t_1 + 26t_2 + 81 \\ x_2 = t_2 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$

Paso 4

Tenemos la ecuación

$$63x_0 - 16x_1 = k_2$$

Partimos de la ecuación

$$63x_0 - 16x_1 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = 63 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = -16 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = 63$ y $x_1 = -16$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 63 \\ 0 & 1 & -16 \end{pmatrix}$$

$63 = -16 \times -3 + 15 \Rightarrow$ Sumamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 0 & 1 & -16 \end{pmatrix}$$

$-16 = 15 \times -2 + 14 \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 15 \\ 2 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 14 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 15 = 14 \times 1 + 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 2 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow 14 = 1 \times 14 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 14 veces la primera

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ 16 & 63 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (-1) \cdot x_0 + (-4) \cdot x_1 = 1 \\ (16) \cdot x_0 + (63) \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1) \cdot (63) + (-4) \cdot (-16) = 1 \\ (16) \cdot (63) + (63) \cdot (-16) = 0 \end{cases} \quad (73)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(63, -16) = 1$.

La primera igualdad de (73) la tenemos que multiplicar por $q=k_2$

$$(-1) \cdot (63) + (-4) \cdot (-16) = 1 \Rightarrow k_2 \cdot (-1) \cdot (63) + k_2 \cdot (-4) \cdot (-16) = k_2 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-k_2) \cdot (63) + (-4k_2) \cdot (-16) = k_2 \quad (74)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (73) por t_3

$$(16t_3) \cdot (63) + (63t_3) \cdot (-16) = 0 \quad (75)$$

Sumamos (74) a (75) sacando factor común:

$$(-k_2 + 16t_3) \cdot (63) + (-4k_2 + 63t_3) \cdot (-16) = k_2$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = -k_2 + 16t_3 \\ x_1 = -4k_2 + 63t_3 \end{cases} \quad t_3 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_2 = 22t_0 + 59t_1 + 26t_2 + 81$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = -22t_0 - 59t_1 - 26t_2 + 16t_3 - 81 \\ x_1 = -88t_0 - 236t_1 - 104t_2 + 63t_3 - 324 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$$

Por último, tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = -22t_0 - 59t_1 - 26t_2 + 16t_3 - 81 \\ x_1 = -88t_0 - 236t_1 - 104t_2 + 63t_3 - 324 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_0 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$$



10. Resuelve la ecuación diofántica

$$-28x_0 + 26x_1 = -26$$

Solución

Dividimos todos los coeficientes por 2 obteniendo la siguiente ecuación:

$$-14x_0 + 13x_1 = -13$$

$$\begin{array}{c|c} 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow -14 = -2^1 \cdot 7^1 \quad \begin{array}{c|c} 13 & 13 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow 13 = 13^1 \quad \begin{array}{c|c} 13 & 13 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow -13 = -13^1$$

$\Rightarrow \text{mcd}[-14, 13] = 1$ que divide a -13 . Tiene solución, comencemos

Paso 1

Partimos de la ecuación

$$-14x_0 + 13x_1 = -13$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = -14 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = 13 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = -14$ y $x_1 = 13$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

$-14 = 13 \times -2 + 12 \Rightarrow$ Sumamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 13 = 12 \times 1 + 1 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 1 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 12 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 \\ 0 & \end{array} \Rightarrow 12 = 1 \times 12 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 12 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 14 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (-1) \cdot x_0 + (-1) \cdot x_1 = 1 \\ (13) \cdot x_0 + (14) \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1) \cdot (-14) + (-1) \cdot (13) = 1 \\ (13) \cdot (-14) + (14) \cdot (13) = 0 \end{cases} \quad (76)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(-14, 13) = 1$.

La primera igualdad de (76) la tenemos que multiplicar por $q=-13$

$$(-1) \cdot (-14) + (-1) \cdot (13) = 1 \Rightarrow -13 \cdot (-1) \cdot (-14) + -13 \cdot (-1) \cdot (13) = -13 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(13) \cdot (-14) + (13) \cdot (13) = -13 \quad (77)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (76) por t_0

$$(13t_0) \cdot (-14) + (14t_0) \cdot (13) = 0 \quad (78)$$

Sumamos (77) a (78) sacando factor común:

$$(13t_0 + 13) \cdot (-14) + (14t_0 + 13) \cdot (13) = -13$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = 13t_0 + 13 \\ x_1 = 14t_0 + 13 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$



11. Resuelve la ecuación diofántica

$$-56x_0 - 89x_1 - 39x_2 + 82x_3 = -21$$

Solución

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c|c} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -56 = -2^3 \cdot 7^1 & \begin{array}{c|c} 89 & 89 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -89 = -89^1 & \begin{array}{c|c} 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -39 = -13^1 \cdot 3^1 \\ \begin{array}{c|c} 82 & 2 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow 82 = 2^1 \cdot 41^1 & \begin{array}{c|c} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -21 = -3^1 \cdot 7^1 & \Rightarrow \text{mcd}[-56, -89, -39, 82] = 1 \end{array}$$

que divide a -21 . Tiene solución, comencemos

Paso 1

Como

$$\text{mcd}[-56, -89, -39] = 1$$

Sea

$$-56x_0 - 89x_1 - 39x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_0 + 82x_3 = -21$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_0 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot k_0 + 1 \cdot x_3 = 82 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_0 = 1$ y $x_3 = 82$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 82 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 8 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 82 \\ 0 & & \end{array}$$

$\Rightarrow 82 = 1 \times 82 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 82 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -82 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_0 + (0) \cdot x_3 = 1 \\ (-82) \cdot k_0 + (1) \cdot x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (82) = 1 \\ (-82) \cdot (1) + (1) \cdot (82) = 0 \end{cases} \quad (79)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, 82) = 1$.

La primera igualdad de (79) la tenemos que multiplicar por $q=-21$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (82) = 1 \Rightarrow -21 \cdot (1) \cdot (1) + -21 \cdot (0) \cdot (82) = -21 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-21) \cdot (1) + (0) \cdot (82) = -21 \quad (80)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (79) por t_0

$$(-82t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (82) = 0 \quad (81)$$

Sumamos (80) a (81) sacando factor común:

$$(-82t_0 - 21) \cdot (1) + (t_0) \cdot (82) = -21$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_0 = -82t_0 - 21 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

Paso 2

Como

$$\text{mcd}[-56, -89] = 1$$

Sea

$$-56x_0 - 89x_1 = k_1$$

Tenemos la ecuación

$$k_1 - 39x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_1 - 39x_2 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_1 + 0 \cdot x_2 = 1 \\ 0 \cdot k_1 + 1 \cdot x_2 = -39 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_1 = 1$ y $x_2 = -39$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -39 \end{pmatrix}$$

$-39 = 1 \times (-39) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 39 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 39 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_1 + (0) \cdot x_2 = 1 \\ (39) \cdot k_1 + (1) \cdot x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-39) = 1 \\ (39) \cdot (1) + (1) \cdot (-39) = 0 \end{cases} \quad (82)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -39) = 1$.

La primera igualdad de (82) la tenemos que multiplicar por $q=k_0$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-39) = 1 \Rightarrow k_0 \cdot (1) \cdot (1) + k_0 \cdot (0) \cdot (-39) = k_0 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(k_0) \cdot (1) + (0) \cdot (-39) = k_0 \quad (83)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (82) por t_1

$$(39t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (-39) = 0 \quad (84)$$

Sumamos (83) a (84) sacando factor común:

$$(k_0 + 39t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (-39) = k_0$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_1 = k_0 + 39t_1 \\ x_2 = t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_0 = -82t_0 - 21$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_1 = -82t_0 + 39t_1 - 21 \\ x_2 = t_1 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$

Paso 3

Tenemos la ecuación

$$-56x_0 - 89x_1 = k_1$$

Partimos de la ecuación

$$-56x_0 - 89x_1 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = -56 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = -89 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = -56$ y $x_1 = -89$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -56 \\ 0 & 1 & -89 \end{pmatrix}$$

$-89 = -56 \times 2 + 23 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -56 \\ -2 & 1 & 23 \end{pmatrix}$$

$-56 = 23 \times -3 + 13 \Rightarrow$ Sumamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 13 \\ -2 & 1 & 23 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 13 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow 23 = 13 \times 1 + 10 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 13 \\ 3 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 10 \\ 3 & 1 & 3 \end{array} \Rightarrow 13 = 10 \times 1 + 3 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -8 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{array} \Rightarrow 10 = 3 \times 3 + 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 3 veces la primera

$$\begin{pmatrix} -8 & 5 & 3 \\ 27 & -17 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \Rightarrow 3 = 1 \times 3 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -89 & 56 & 0 \\ 27 & -17 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (27) \cdot x_0 + (-17) \cdot x_1 = 1 \\ (-89) \cdot x_0 + (56) \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (27) \cdot (-56) + (-17) \cdot (-89) = 1 \\ (-89) \cdot (-56) + (56) \cdot (-89) = 0 \end{cases} \quad (85)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(-56, -89) = 1$.

La primera igualdad de (85) la tenemos que multiplicar por $q=k_1$

$$(27) \cdot (-56) + (-17) \cdot (-89) = 1 \Rightarrow k_1 \cdot (27) \cdot (-56) + k_1 \cdot (-17) \cdot (-89) = k_1 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(27k_1) \cdot (-56) + (-17k_1) \cdot (-89) = k_1 \quad (86)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (85) por t_2

$$(-89t_2) \cdot (-56) + (56t_2) \cdot (-89) = 0 \quad (87)$$

Sumamos (86) a (87) sacando factor común:

$$(27k_1 - 89t_2) \cdot (-56) + (-17k_1 + 56t_2) \cdot (-89) = k_1$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = 27k_1 - 89t_2 \\ x_1 = -17k_1 + 56t_2 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_1 = -82t_0 + 39t_1 - 21$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = -2214t_0 + 1053t_1 - 89t_2 - 567 \\ x_1 = 1394t_0 - 663t_1 + 56t_2 + 357 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$

Por último, tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = -2214t_0 + 1053t_1 - 89t_2 - 567 \\ x_1 = 1394t_0 - 663t_1 + 56t_2 + 357 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$



12. Resuelve la ecuación diofántica

$$-96x_0 - 38x_1 - 2x_2 - 90x_3 + 2x_4 = 83$$

Solución

$$\begin{array}{l} 96 \mid 2 \\ 48 \mid 2 \\ 24 \mid 2 \\ 12 \mid 2 \Leftrightarrow -96 = -2^5 \cdot 3^1 \\ 6 \mid 2 \\ 3 \mid 3 \\ 1 \mid \\ 90 \mid 2 \\ 45 \mid 3 \\ 15 \mid 3 \Leftrightarrow -90 = -2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \\ 5 \mid 5 \\ 1 \mid \end{array} \quad \begin{array}{l} 38 \mid 2 \\ 19 \mid 19 \Leftrightarrow -38 = -19^1 \cdot 2^1 \\ 1 \mid \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \mid 2 \\ 1 \mid \end{array} \Leftrightarrow -2 = -2^1$$

$$\begin{array}{l} 83 \mid 83 \Leftrightarrow 83 = 83^1 \\ 1 \mid \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{mcd}[-96, -38, -2, -90, 2] = 2$$

$$\begin{array}{l} 83 \mid 2 \\ 03 \mid 41 \\ 1 \mid \end{array} \Rightarrow 83 = 2 \times 41 + 1$$

No tiene solución ya que el mcd de los coeficientes no divide al término independiente

13. Resuelve la ecuación diofántica

$$-74x_0 - 55x_1 - 33x_2 - 13x_3 = 47$$

Solución

$$\begin{array}{l} 74 \mid 2 \\ 37 \mid 37 \Leftrightarrow -74 = -2^1 \cdot 37^1 \\ 1 \mid \end{array} \quad \begin{array}{l} 55 \mid 5 \\ 11 \mid 11 \Leftrightarrow -55 = -11^1 \cdot 5^1 \\ 1 \mid \end{array} \quad \begin{array}{l} 33 \mid 3 \\ 11 \mid 11 \Leftrightarrow \\ 1 \mid \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -33 = -11^1 \cdot 3^1 \\ 13 \mid 13 \Leftrightarrow -13 = -13^1 \\ 1 \mid \end{array} \quad \begin{array}{l} 47 \mid 47 \Leftrightarrow 47 = 47^1 \\ 1 \mid \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{mcd}[-74, -55, -33, -13] = 1 \text{ que divide a } 47. \text{ Tiene solución, comencemos}$$

Paso 1

Como

$$\text{mcd}[-74, -55, -33] = 1$$

Sea

$$-74x_0 - 55x_1 - 33x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_0 - 13x_3 = 47$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_0 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot k_0 + 1 \cdot x_3 = -13 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_0 = 1$ y $x_3 = -13$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -13 \end{pmatrix}$$

$-13 = 1 \times (-13) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 13 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 13 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_0 + (0) \cdot x_3 = 1 \\ (13) \cdot k_0 + (1) \cdot x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-13) = 1 \\ (13) \cdot (1) + (1) \cdot (-13) = 0 \end{cases} \quad (88)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -13) = 1$.

La primera igualdad de (88) la tenemos que multiplicar por $q=47$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-13) = 1 \Rightarrow 47 \cdot (1) \cdot (1) + 47 \cdot (0) \cdot (-13) = 47 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(47) \cdot (1) + (0) \cdot (-13) = 47 \quad (89)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (88) por t_0

$$(13t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (-13) = 0 \quad (90)$$

Sumamos (89) a (90) sacando factor común:

$$(13t_0 + 47) \cdot (1) + (t_0) \cdot (-13) = 47$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_0 = 13t_0 + 47 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

Paso 2

Como

$$\text{mcd}[-74, -55] = 1$$

Sea

$$-74x_0 - 55x_1 = k_1$$

Tenemos la ecuación

$$k_1 - 33x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_1 - 33x_2 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_1 + 0 \cdot x_2 = 1 \\ 0 \cdot k_1 + 1 \cdot x_2 = -33 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_1 = 1$ y $x_2 = -33$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -33 \end{pmatrix}$$

$-33 = 1 \times (-33) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 33 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 33 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_1 + (0) \cdot x_2 &= 1 \\ (33) \cdot k_1 + (1) \cdot x_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-33) &= 1 \\ (33) \cdot (1) + (1) \cdot (-33) &= 0 \end{cases} \quad (91)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -33) = 1$.

La primera igualdad de (91) la tenemos que multiplicar por $q=k_0$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-33) = 1 \Rightarrow k_0 \cdot (1) \cdot (1) + k_0 \cdot (0) \cdot (-33) = k_0 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(k_0) \cdot (1) + (0) \cdot (-33) = k_0 \quad (92)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (91) por t_1

$$(33t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (-33) = 0 \quad (93)$$

Sumamos (92) a (93) sacando factor común:

$$(k_0 + 33t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (-33) = k_0$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_1 = k_0 + 33t_1 \\ x_2 = t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_0 = 13t_0 + 47$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_1 = 13t_0 + 33t_1 + 47 \\ x_2 = t_1 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$

Paso 3

Tenemos la ecuación

$$-74x_0 - 55x_1 = k_1$$

Partimos de la ecuación

$$-74x_0 - 55x_1 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 &= -74 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 &= -55 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = -74$ y $x_1 = -55$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -74 \\ 0 & 1 & -55 \end{pmatrix}$$

$-74 = -55 \times 2 + 36 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 36 \\ 0 & 1 & -55 \end{pmatrix}$$

$-55 = 36 \times -2 + 17 \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 36 \\ 2 & -3 & 17 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 36 & 17 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \Rightarrow 36 = 17 \times 2 + 2 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 17 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 17 & 2 \\ \hline 1 & 8 \end{array} \Rightarrow 17 = 2 \times 8 + 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 8 veces la primera

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 26 & -35 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 1 \times 2 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -55 & 74 & 0 \\ 26 & -35 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (26) \cdot x_0 + (-35) \cdot x_1 = 1 \\ (-55) \cdot x_0 + (74) \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (26) \cdot (-74) + (-35) \cdot (-55) = 1 \\ (-55) \cdot (-74) + (74) \cdot (-55) = 0 \end{cases} \quad (94)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(-74, -55) = 1$.

La primera igualdad de (94) la tenemos que multiplicar por $q=k_1$

$$(26) \cdot (-74) + (-35) \cdot (-55) = 1 \Rightarrow k_1 \cdot (26) \cdot (-74) + k_1 \cdot (-35) \cdot (-55) = k_1 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(26k_1) \cdot (-74) + (-35k_1) \cdot (-55) = k_1 \quad (95)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (94) por t_2

$$(-55t_2) \cdot (-74) + (74t_2) \cdot (-55) = 0 \quad (96)$$

Sumamos (95) a (96) sacando factor común:

$$(26k_1 - 55t_2) \cdot (-74) + (-35k_1 + 74t_2) \cdot (-55) = k_1$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = 26k_1 - 55t_2 \\ x_1 = -35k_1 + 74t_2 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_1 = 13t_0 + 33t_1 + 47$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = 338t_0 + 858t_1 - 55t_2 + 1222 \\ x_1 = -455t_0 - 1155t_1 + 74t_2 - 1645 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$

Por último, tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = 338t_0 + 858t_1 - 55t_2 + 1222 \\ x_1 = -455t_0 - 1155t_1 + 74t_2 - 1645 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$



14. Resuelve la ecuación diofántica

$$33x_0 - 43x_1 = -79$$

Solución

$$\begin{array}{c|c} 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow 33 = 11^1 \cdot 3^1 \quad \begin{array}{c|c} 43 & 43 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow -43 = -43^1 \quad \begin{array}{c|c} 79 & 79 \\ 1 & 1 \end{array} \Leftrightarrow -79 = -79^1$$

$\Rightarrow \text{mcd}[33, -43] = 1$ que divide a -79 . Tiene solución, comencemos

Paso 1

Partimos de la ecuación

$$33x_0 - 43x_1 = -79$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = 33 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = -43 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = 33$ y $x_1 = -43$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 33 \\ 0 & 1 & -43 \end{pmatrix}$$

$-43 = 33 \times -2 + 23 \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 33 \\ 2 & 1 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{array} \begin{array}{c} 23 \\ 1 \end{array} \Rightarrow 33 = 23 \times 1 + 10 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 1 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 10 \\ 2 & 1 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{array} \begin{array}{c} 10 \\ 23 \end{array} \Rightarrow 23 = 10 \times 2 + 3 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 2 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 10 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 10 \end{array} \Rightarrow 10 = 3 \times 3 + 1 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 3 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} -13 & -10 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{array} \Rightarrow 3 = 1 \times 3 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 3 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} -13 & -10 & 1 \\ 43 & 33 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (-13) \cdot x_0 + (-10) \cdot x_1 = 1 \\ (43) \cdot x_0 + (33) \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (-13) \cdot (33) + (-10) \cdot (-43) = 1 \\ (43) \cdot (33) + (33) \cdot (-43) = 0 \end{cases} \quad (97)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(33, -43) = 1$.

La primera igualdad de (97) la tenemos que multiplicar por $q=-79$

$$(-13) \cdot (33) + (-10) \cdot (-43) = 1 \Rightarrow -79 \cdot (-13) \cdot (33) + -79 \cdot (-10) \cdot (-43) = -79 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(1027) \cdot (33) + (790) \cdot (-43) = -79 \quad (98)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (97) por t_0

$$(43t_0) \cdot (33) + (33t_0) \cdot (-43) = 0 \quad (99)$$

Sumamos (98) a (99) sacando factor común:

$$(43t_0 + 1027) \cdot (33) + (33t_0 + 790) \cdot (-43) = -79$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = 43t_0 + 1027 \\ x_1 = 33t_0 + 790 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$



15. Resuelve la ecuación diofántica

$$-97x_0 + 74x_1 - 39x_2 + 75x_3 + 7x_4 = -10$$

Solución

$$\begin{array}{l} 97 \mid 97 \Leftrightarrow -97 = -97^1 \\ 1 \mid 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 74 \mid 2 \\ 37 \mid 37 \Leftrightarrow 74 = 2^1 \cdot 37^1 \\ 1 \mid 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 39 \mid 3 \\ 13 \mid 13 \Leftrightarrow -39 = -13^1 \cdot 3^1 \\ 1 \mid 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 75 \mid 3 \\ 25 \mid 5 \Leftrightarrow 75 = 3^1 \cdot 5^2 \\ 5 \mid 5 \\ 1 \mid 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 7 \mid 7 \Leftrightarrow 7 = 7^1 \\ 1 \mid 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 10 \mid 2 \\ 5 \mid 5 \Leftrightarrow -10 = -2^1 \cdot 5^1 \\ 1 \mid 1 \end{array}$$

$\Rightarrow \text{mcd}[-97, 74, -39, 75, 7] = 1$ que divide a -10 . Tiene solución, comencemos

Paso 1

Como

$$\text{mcd}[-97, 74, -39, 75] = 1$$

Sea

$$-97x_0 + 74x_1 - 39x_2 + 75x_3 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_0 + 7x_4 = -10$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_0 + 0 \cdot x_4 = 1 \\ 0 \cdot k_0 + 1 \cdot x_4 = 7 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_0 = 1$ y $x_4 = 7$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 7 & 1 \\ \hline 0 & 7 \end{array} \Rightarrow 7 = 1 \times 7 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 7 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_0 + (0) \cdot x_4 = 1 \\ (-7) \cdot k_0 + (1) \cdot x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (7) = 1 \\ (-7) \cdot (1) + (1) \cdot (7) = 0 \end{cases} \quad (100)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, 7) = 1$.

La primera igualdad de (100) la tenemos que multiplicar por $q = -10$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (7) = 1 \Rightarrow -10 \cdot (1) \cdot (1) + -10 \cdot (0) \cdot (7) = -10 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-10) \cdot (1) + (0) \cdot (7) = -10 \quad (101)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (100) por t_0

$$(-7t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (7) = 0 \quad (102)$$

Sumamos (101) a (102) sacando factor común:

$$(-7t_0 - 10) \cdot (1) + (t_0) \cdot (7) = -10$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_0 = -7t_0 - 10 \\ x_4 = t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

Paso 2

Como

$$\text{mcd}[-97, 74, -39] = 1$$

Sea

$$-97x_0 + 74x_1 - 39x_2 = k_1$$

Tenemos la ecuación

$$k_1 + 75x_3 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_1 + 75x_3 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_1 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot k_1 + 1 \cdot x_3 = 75 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_1 = 1$ y $x_3 = 75$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 75 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 75 & 1 \\ \hline 0 & 75 \\ 0 & \end{array} \Rightarrow 75 = 1 \times 75 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 75 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -75 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_1 + (0) \cdot x_3 &= 1 \\ (-75) \cdot k_1 + (1) \cdot x_3 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (75) &= 1 \\ (-75) \cdot (1) + (1) \cdot (75) &= 0 \end{cases} \quad (103)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, 75) = 1$.

La primera igualdad de (103) la tenemos que multiplicar por $q=k_0$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (75) = 1 \Rightarrow k_0 \cdot (1) \cdot (1) + k_0 \cdot (0) \cdot (75) = k_0 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(k_0) \cdot (1) + (0) \cdot (75) = k_0 \quad (104)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (103) por t_1

$$(-75t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (75) = 0 \quad (105)$$

Sumamos (104) a (105) sacando factor común:

$$(k_0 - 75t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (75) = k_0$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_1 = k_0 - 75t_1 \\ x_3 = t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_0 = -7t_0 - 10$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_2 = -7t_0 - 75t_1 - 10 \\ x_3 = t_1 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$

Paso 3

Como

$$\text{mcd}[-97, 74] = 1$$

Sea

$$-97x_0 + 74x_1 = k_2$$

Tenemos la ecuación

$$k_2 - 39x_2 = k_1$$

Partimos de la ecuación

$$k_2 - 39x_2 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_2 + 0 \cdot x_2 &= 1 \\ 0 \cdot k_2 + 1 \cdot x_2 &= -39 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_2 = 1$ y $x_2 = -39$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -39 \end{pmatrix}$$

$-39 = 1 \times (-39) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 39 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 39 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_2 + (0) \cdot x_2 &= 1 \\ (39) \cdot k_2 + (1) \cdot x_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-39) &= 1 \\ (39) \cdot (1) + (1) \cdot (-39) &= 0 \end{cases} \quad (106)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -39) = 1$.

La primera igualdad de (106) la tenemos que multiplicar por $q=k_1$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-39) = 1 \Rightarrow k_1 \cdot (1) + k_1 \cdot (0) \cdot (-39) = k_1 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(k_1) \cdot (1) + (0) \cdot (-39) = k_1 \quad (107)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (106) por t_2

$$(39t_2) \cdot (1) + (t_2) \cdot (-39) = 0 \quad (108)$$

Sumamos (107) a (108) sacando factor común:

$$(k_1 + 39t_2) \cdot (1) + (t_2) \cdot (-39) = k_1$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_2 = k_1 + 39t_2 \\ x_2 = t_2 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_1 = -7t_0 - 75t_1 - 10$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_1 = -7t_0 - 75t_1 + 39t_2 - 10 \\ x_2 = t_2 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$

Paso 4

Tenemos la ecuación

$$-97x_0 + 74x_1 = k_2$$

Partimos de la ecuación

$$-97x_0 + 74x_1 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 &= -97 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 &= 74 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = -97$ y $x_1 = 74$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -97 \\ 0 & 1 & 74 \end{pmatrix}$$

$-97 = 74 \times -2 + 51 \Rightarrow$ Sumamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 51 \\ 0 & 1 & 74 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 51 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \Rightarrow 74 = 51 \times 1 + 23 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 51 \\ -1 & -1 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 23 \\ \hline 5 & 2 \end{array} \Rightarrow 51 = 23 \times 2 + 5 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 2 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 \end{array} \Rightarrow 23 = 5 \times 4 + 3 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 4 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -13 & -17 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \Rightarrow 5 = 3 \times 1 + 2 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 1 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 21 & 2 \\ -13 & -17 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 3 = 2 \times 1 + 1 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 1 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 21 & 2 \\ -29 & -38 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 1 \times 2 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 2 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 74 & 97 & 0 \\ -29 & -38 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (-29) \cdot x_0 + (-38) \cdot x_1 = 1 \\ (74) \cdot x_0 + (97) \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-29) \cdot (-97) + (-38) \cdot (74) = 1 \\ (74) \cdot (-97) + (97) \cdot (74) = 0 \end{cases} \quad (109)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(-97, 74) = 1$.

La primera igualdad de (109) la tenemos que multiplicar por $q=k_2$

$$(-29) \cdot (-97) + (-38) \cdot (74) = 1 \Rightarrow k_2 \cdot (-29) \cdot (-97) + k_2 \cdot (-38) \cdot (74) = k_2 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-29k_2) \cdot (-97) + (-38k_2) \cdot (74) = k_2 \quad (110)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (109) por t_3

$$(74t_3) \cdot (-97) + (97t_3) \cdot (74) = 0 \quad (111)$$

Sumamos (110) a (111) sacando factor común:

$$(-29k_2 + 74t_3) \cdot (-97) + (-38k_2 + 97t_3) \cdot (74) = k_2$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = -29k_2 + 74t_3 \\ x_1 = -38k_2 + 97t_3 \end{cases} \quad t_3 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_2 = -7t_0 - 75t_1 + 39t_2 - 10$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = 203t_0 + 2175t_1 - 1131t_2 + 74t_3 + 290 \\ x_1 = 266t_0 + 2850t_1 - 1482t_2 + 97t_3 + 380 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$$

Por último, tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = 203t_0 + 2175t_1 - 1131t_2 + 74t_3 + 290 \\ x_1 = 266t_0 + 2850t_1 - 1482t_2 + 97t_3 + 380 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_0 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$$



16. Resuelve la ecuación diofántica

$$48x_0 + 91x_1 + 98x_2 - 15x_3 = -62$$

Solución

$$\begin{array}{l} 48 \mid 2 \\ 24 \mid 2 \\ 12 \mid 2 \\ 6 \mid 2 \\ 3 \mid 3 \\ 1 \mid \end{array} \Leftrightarrow 48 = 2^4 \cdot 3^1 \quad \begin{array}{l} 91 \mid 7 \\ 13 \mid 13 \\ 1 \mid \end{array} \Leftrightarrow 91 = 13^1 \cdot 7^1 \quad \begin{array}{l} 98 \mid 2 \\ 49 \mid 7 \\ 7 \mid 7 \\ 1 \mid \end{array} \Leftrightarrow 98 = 2^1 \cdot 7^2 \quad \begin{array}{l} 15 \mid 3 \\ 5 \mid 5 \\ 1 \mid \end{array}$$

$$\Leftrightarrow -15 = -3^1 \cdot 5^1 \quad \begin{array}{l} 62 \mid 2 \\ 31 \mid 31 \\ 1 \mid \end{array} \Leftrightarrow -62 = -2^1 \cdot 31^1 \quad \Rightarrow \text{mcd}[48, 91, 98, -15] = 1 \text{ que}$$

divide a -62. Tiene solución, comencemos

Paso 1

Como

$$\text{mcd}[48, 91, 98] = 1$$

Sea

$$48x_0 + 91x_1 + 98x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_0 - 15x_3 = -62$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_0 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot k_0 + 1 \cdot x_3 = -15 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_0 = 1$ y $x_3 = -15$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -15 \end{pmatrix}$$

$-15 = 1 \times (-15) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 15 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 15 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_0 + (0) \cdot x_3 = 1 \\ (15) \cdot k_0 + (1) \cdot x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-15) &= 1 \\ (15) \cdot (1) + (1) \cdot (-15) &= 0 \end{cases} \quad (112)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -15) = 1$.

La primera igualdad de (112) la tenemos que multiplicar por $q=-62$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-15) = 1 \Rightarrow -62 \cdot (1) \cdot (1) + -62 \cdot (0) \cdot (-15) = -62 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-62) \cdot (1) + (0) \cdot (-15) = -62 \quad (113)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (112) por t_0

$$(15t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (-15) = 0 \quad (114)$$

Sumamos (113) a (114) sacando factor común:

$$(15t_0 - 62) \cdot (1) + (t_0) \cdot (-15) = -62$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_0 = 15t_0 - 62 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

Paso 2

Como

$$\text{mcd}[48, 91] = 1$$

Sea

$$48x_0 + 91x_1 = k_1$$

Tenemos la ecuación

$$k_1 + 98x_2 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_1 + 98x_2 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_1 + 0 \cdot x_2 &= 1 \\ 0 \cdot k_1 + 1 \cdot x_2 &= 98 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_1 = 1$ y $x_2 = 98$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 98 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 9 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 98 \\ 0 & & \end{array}$$

$\Rightarrow 98 = 1 \times 98 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 98 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -98 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_1 + (0) \cdot x_2 &= 1 \\ (-98) \cdot k_1 + (1) \cdot x_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (98) &= 1 \\ (-98) \cdot (1) + (1) \cdot (98) &= 0 \end{cases} \quad (115)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, 98) = 1$.

La primera igualdad de (115) la tenemos que multiplicar por $q=k_0$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (98) = 1 \Rightarrow k_0 \cdot (1) \cdot (1) + k_0 \cdot (0) \cdot (98) = k_0 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(k_0) \cdot (1) + (0) \cdot (98) = k_0 \quad (116)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (115) por t_1

$$(-98t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (98) = 0 \quad (117)$$

Sumamos (116) a (117) sacando factor común:

$$(k_0 - 98t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (98) = k_0$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_1 = k_0 - 98t_1 \\ x_2 = t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_0 = 15t_0 - 62$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_1 = 15t_0 - 98t_1 - 62 \\ x_2 = t_1 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$

Paso 3

Tenemos la ecuación

$$48x_0 + 91x_1 = k_1$$

Partimos de la ecuación

$$48x_0 + 91x_1 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = 48 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = 91 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = 48$ y $x_1 = 91$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 48 \\ 0 & 1 & 91 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 9 & 1 & 48 \\ 4 & 3 & 1 \end{array} \Rightarrow 91 = 48 \times 1 + 43 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 1 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 48 \\ -1 & 1 & 43 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 4 & 8 & 43 \\ 5 & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 48 = 43 \times 1 + 5 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 1 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 43 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 3 \end{array} \Rightarrow 43 = 5 \times 8 + 3 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 8 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -17 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \Rightarrow 5 = 3 \times 1 + 2 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 1 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 19 & -10 & 2 \\ -17 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 3 = 2 \times 1 + 1 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 1 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 19 & -10 & 2 \\ -36 & 19 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 1 \times 2 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 2 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 91 & -48 & 0 \\ -36 & 19 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (-36) \cdot x_0 + (19) \cdot x_1 = 1 \\ (91) \cdot x_0 + (-48) \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-36) \cdot (48) + (19) \cdot (91) = 1 \\ (91) \cdot (48) + (-48) \cdot (91) = 0 \end{cases} \quad (118)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(48, 91) = 1$.

La primera igualdad de (118) la tenemos que multiplicar por $q=k_1$

$$(-36) \cdot (48) + (19) \cdot (91) = 1 \Rightarrow k_1 \cdot (-36) \cdot (48) + k_1 \cdot (19) \cdot (91) = k_1 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-36k_1) \cdot (48) + (19k_1) \cdot (91) = k_1 \quad (119)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (118) por t_2

$$(91t_2) \cdot (48) + (-48t_2) \cdot (91) = 0 \quad (120)$$

Sumamos (119) a (120) sacando factor común:

$$(-36k_1 + 91t_2) \cdot (48) + (19k_1 - 48t_2) \cdot (91) = k_1$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = -36k_1 + 91t_2 \\ x_1 = 19k_1 - 48t_2 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_1 = 15t_0 - 98t_1 - 62$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = -540t_0 + 3528t_1 + 91t_2 + 2232 \\ x_1 = 285t_0 - 1862t_1 - 48t_2 - 1178 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$

Por último, tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = -540t_0 + 3528t_1 + 91t_2 + 2232 \\ x_1 = 285t_0 - 1862t_1 - 48t_2 - 1178 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_0 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$



17. Resuelve la ecuación diofántica

$$7x_0 - 52x_1 - 2x_2 - 15x_3 + 35x_4 = -29$$

Solución

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c|c} 7 & 7 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow 7 = 7^1 &
\begin{array}{c|c} 52 & 2 \\ 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -52 = -13^1 \cdot 2^2 &
\begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow -2 = -2^1 \\
\begin{array}{c|c} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -15 = -3^1 \cdot 5^1 &
\begin{array}{c|c} 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow 35 = 5^1 \cdot 7^1 &
\begin{array}{c|c} 29 & 29 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow -29 = -29^1
\end{array}$$

$\Rightarrow \text{mcd}[7, -52, -2, -15, 35] = 1$ que divide a -29 . Tiene solución, comencemos

Paso 1

Como

$$\text{mcd}[7, -52, -2, -15] = 1$$

Sea

$$7x_0 - 52x_1 - 2x_2 - 15x_3 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_0 + 35x_4 = -29$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_0 + 0 \cdot x_4 = 1 \\ 0 \cdot k_0 + 1 \cdot x_4 = 35 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_0 = 1$ y $x_4 = 35$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 3 & 5 \\ 0 & 5 \\ 0 & \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 35 \\ \end{array}$$

$\Rightarrow 35 = 1 \times 35 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 35 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -35 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_0 + (0) \cdot x_4 = 1 \\ (-35) \cdot k_0 + (1) \cdot x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow
\begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (35) = 1 \\ (-35) \cdot (1) + (1) \cdot (35) = 0 \end{cases} \quad (121)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, 35) = 1$.

La primera igualdad de (121) la tenemos que multiplicar por $q = -29$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (35) = 1 \Rightarrow -29 \cdot (1) \cdot (1) + -29 \cdot (0) \cdot (35) = -29 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-29) \cdot (1) + (0) \cdot (35) = -29 \quad (122)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (121) por t_0

$$(-35t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (35) = 0 \quad (123)$$

Sumamos (122) a (123) sacando factor común:

$$(-35t_0 - 29) \cdot (1) + (t_0) \cdot (35) = -29$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_0 = -35t_0 - 29 \\ x_4 = t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

Paso 2

Como

$$\text{mcd}[7, -52, -2] = 1$$

Sea

$$7x_0 - 52x_1 - 2x_2 = k_1$$

Tenemos la ecuación

$$k_1 - 15x_3 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_1 - 15x_3 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_1 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot k_1 + 1 \cdot x_3 = -15 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_1 = 1$ y $x_3 = -15$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -15 \end{pmatrix}$$

$-15 = 1 \times (-15) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 15 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 15 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (1) \cdot k_1 + (0) \cdot x_3 &= 1 \\ (15) \cdot k_1 + (1) \cdot x_3 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-15) &= 1 \\ (15) \cdot (1) + (1) \cdot (-15) &= 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (124)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -15) = 1$.

La primera igualdad de (124) la tenemos que multiplicar por $q=k_0$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-15) = 1 \Rightarrow k_0 \cdot (1) \cdot (1) + k_0 \cdot (0) \cdot (-15) = k_0 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(k_0) \cdot (1) + (0) \cdot (-15) = k_0 \quad (125)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (124) por t_1

$$(15t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (-15) = 0 \quad (126)$$

Sumamos (125) a (126) sacando factor común:

$$(k_0 + 15t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (-15) = k_0$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_1 = k_0 + 15t_1 \\ x_3 = t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_0 = -35t_0 - 29$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_2 = -35t_0 + 15t_1 - 29 \\ x_3 = t_1 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$

Paso 3

Como

$$\text{mcd}[7, -52] = 1$$

Sea

$$7x_0 - 52x_1 = k_2$$

Tenemos la ecuación

$$k_2 - 2x_2 = k_1$$

Partimos de la ecuación

$$k_2 - 2x_2 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_2 + 0 \cdot x_2 = 1 \\ 0 \cdot k_2 + 1 \cdot x_2 = -2 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_2 = 1$ y $x_2 = -2$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$-2 = 1 \times (-2) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_2 + (0) \cdot x_2 = 1 \\ (2) \cdot k_2 + (1) \cdot x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-2) = 1 \\ (2) \cdot (1) + (1) \cdot (-2) = 0 \end{cases} \quad (127)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -2) = 1$.

La primera igualdad de (127) la tenemos que multiplicar por $q=k_1$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-2) = 1 \Rightarrow k_1 \cdot (1) \cdot (1) + k_1 \cdot (0) \cdot (-2) = k_1 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(k_1) \cdot (1) + (0) \cdot (-2) = k_1 \quad (128)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (127) por t_2

$$(2t_2) \cdot (1) + (t_2) \cdot (-2) = 0 \quad (129)$$

Sumamos (128) a (129) sacando factor común:

$$(k_1 + 2t_2) \cdot (1) + (t_2) \cdot (-2) = k_1$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_2 = k_1 + 2t_2 \\ x_2 = t_2 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_1 = -35t_0 + 15t_1 - 29$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_1 = -35t_0 + 15t_1 + 2t_2 - 29 \\ x_2 = t_2 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$

Paso 4

Tenemos la ecuación

$$7x_0 - 52x_1 = k_2$$

Partimos de la ecuación

$$7x_0 - 52x_1 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = 7 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = -52 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = 7$ y $x_1 = -52$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -52 \end{pmatrix}$$

$-52 = 7 \times -8 + 4 \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 8 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$7 \mid 4$
 $3 \mid 1 \Rightarrow 7 = 4 \times 1 + 3 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -7 & -1 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$4 \mid 3$
 $1 \mid 1 \Rightarrow 4 = 3 \times 1 + 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} -7 & -1 & 3 \\ 15 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$3 \mid 1$
 $0 \mid 3 \Rightarrow 3 = 1 \times 3 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} -52 & -7 & 0 \\ 15 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (15) \cdot x_0 + (2) \cdot x_1 = 1 \\ (-52) \cdot x_0 + (-7) \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (15) \cdot (7) + (2) \cdot (-52) = 1 \\ (-52) \cdot (7) + (-7) \cdot (-52) = 0 \end{cases} \quad (130)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(7, -52) = 1$.

La primera igualdad de (130) la tenemos que multiplicar por $q=k_2$

$$(15) \cdot (7) + (2) \cdot (-52) = 1 \Rightarrow k_2 \cdot (15) \cdot (7) + k_2 \cdot (2) \cdot (-52) = k_2 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(15k_2) \cdot (7) + (2k_2) \cdot (-52) = k_2 \quad (131)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (130) por t_3

$$(-52t_3) \cdot (7) + (-7t_3) \cdot (-52) = 0 \quad (132)$$

Sumamos (131) a (132) sacando factor común:

$$(15k_2 - 52t_3) \cdot (7) + (2k_2 - 7t_3) \cdot (-52) = k_2$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = 15k_2 - 52t_3 \\ x_1 = 2k_2 - 7t_3 \end{cases} \quad t_3 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_2 = -35t_0 + 15t_1 + 2t_2 - 29$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = -525t_0 + 225t_1 + 30t_2 - 52t_3 - 435 \\ x_1 = -70t_0 + 30t_1 + 4t_2 - 7t_3 - 58 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$$

Por último, tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = -525t_0 + 225t_1 + 30t_2 - 52t_3 - 435 \\ x_1 = -70t_0 + 30t_1 + 4t_2 - 7t_3 - 58 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_0 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$$



18. Resuelve la ecuación diofántica

$$3x_0 + 74x_1 - 30x_2 + 96x_3 - 57x_4 = 64$$

Solución

$$\begin{array}{l} \begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow 3 = 3^1 & \begin{array}{c|c} 74 & 2 \\ \hline 37 & 37 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow 74 = 2^1 \cdot 37^1 & \begin{array}{c|c} 30 & 2 \\ \hline 15 & 3 \\ \hline 5 & 5 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow -30 = -2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \\ \\ \begin{array}{c|c} 96 & 2 \\ \hline 48 & 2 \\ \hline 24 & 2 \\ \hline 12 & 2 \\ \hline 6 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow 96 = 2^5 \cdot 3^1 & \begin{array}{c|c} 57 & 3 \\ \hline 19 & 19 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow -57 = -19^1 \cdot 3^1 & \begin{array}{c|c} 64 & 2 \\ \hline 32 & 2 \\ \hline 16 & 2 \\ \hline 8 & 2 \\ \hline 4 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow 64 = 2^6 \end{array}$$

$\Rightarrow \text{mcd}[3, 74, -30, 96, -57] = 1$ que divide a 64. Tiene solución, comencemos

Paso 1

Como

$$\text{mcd}[3, 74, -30, 96] = 1$$

Sea

$$3x_0 + 74x_1 - 30x_2 + 96x_3 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_0 - 57x_4 = 64$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_0 + 0 \cdot x_4 = 1 \\ 0 \cdot k_0 + 1 \cdot x_4 = -57 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_0 = 1$ y $x_4 = -57$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -57 \end{pmatrix}$$

$-57 = 1 \times (-57) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 57 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 57 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_0 + (0) \cdot x_4 = 1 \\ (57) \cdot k_0 + (1) \cdot x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-57) = 1 \\ (57) \cdot (1) + (1) \cdot (-57) = 0 \end{cases} \quad (133)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -57) = 1$.

La primera igualdad de (133) la tenemos que multiplicar por $q=64$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-57) = 1 \Rightarrow 64 \cdot (1) \cdot (1) + 64 \cdot (0) \cdot (-57) = 64 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(64) \cdot (1) + (0) \cdot (-57) = 64 \quad (134)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (133) por t_0

$$(57t_0) \cdot (1) + (t_0) \cdot (-57) = 0 \quad (135)$$

Sumamos (134) a (135) sacando factor común:

$$(57t_0 + 64) \cdot (1) + (t_0) \cdot (-57) = 64$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_0 = 57t_0 + 64 \\ x_4 = t_0 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

Paso 2

Como

$$\text{mcd}[3, 74, -30] = 1$$

Sea

$$3x_0 + 74x_1 - 30x_2 = k_1$$

Tenemos la ecuación

$$k_1 + 96x_3 = k_0$$

Partimos de la ecuación

$$k_1 + 96x_3 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_1 + 0 \cdot x_3 = 1 \\ 0 \cdot k_1 + 1 \cdot x_3 = 96 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_1 = 1$ y $x_3 = 96$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 96 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 96 & 1 & 1 \\ 0 & 96 & 96 \\ 0 & & \end{array}$$

$\Rightarrow 96 = 1 \times 96 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 96 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -96 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_1 + (0) \cdot x_3 &= 1 \\ (-96) \cdot k_1 + (1) \cdot x_3 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (96) &= 1 \\ (-96) \cdot (1) + (1) \cdot (96) &= 0 \end{cases} \quad (136)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, 96) = 1$.

La primera igualdad de (136) la tenemos que multiplicar por $q=k_0$

$$(1) \cdot (1) + (0) \cdot (96) = 1 \Rightarrow k_0 \cdot (1) \cdot (1) + k_0 \cdot (0) \cdot (96) = k_0 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(k_0) \cdot (1) + (0) \cdot (96) = k_0 \quad (137)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (136) por t_1

$$(-96t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (96) = 0 \quad (138)$$

Sumamos (137) a (138) sacando factor común:

$$(k_0 - 96t_1) \cdot (1) + (t_1) \cdot (96) = k_0$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_1 = k_0 - 96t_1 \\ x_3 = t_1 \end{cases} \quad t_1 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_0 = 57t_0 + 64$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_2 = 57t_0 - 96t_1 + 64 \\ x_3 = t_1 \end{cases} \quad t_0, t_1 \in \mathbb{Z}$$

Paso 3

Como

$$\text{mcd}[3, 74] = 1$$

Sea

$$3x_0 + 74x_1 = k_2$$

Tenemos la ecuación

$$k_2 - 30x_2 = k_1$$

Partimos de la ecuación

$$k_2 - 30x_2 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot k_2 + 0 \cdot x_2 &= 1 \\ 0 \cdot k_2 + 1 \cdot x_2 &= -30 \end{cases}$ que tiene como soluciones $k_2 = 1$ y $x_2 = -30$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -30 \end{pmatrix}$$

$-30 = 1 \times (-30) \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 30 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 30 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (1) \cdot k_2 + (0) \cdot x_2 &= 1 \\ (30) \cdot k_2 + (1) \cdot x_2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1) \cdot (1) + (0) \cdot (-30) &= 1 \\ (30) \cdot (1) + (1) \cdot (-30) &= 0 \end{cases} \quad (139)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(1, -30) = 1$.

La primera igualdad de (139) la tenemos que multiplicar por $q=k_1$
 $(1) \cdot (1) + (0) \cdot (-30) = 1 \Rightarrow k_1 \cdot (1) + k_1 \cdot (0) \cdot (-30) = k_1 \cdot 1 \Rightarrow$

$$(k_1) \cdot (1) + (0) \cdot (-30) = k_1 \quad (140)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (139) por t_2

$$(30t_2) \cdot (1) + (t_2) \cdot (-30) = 0 \quad (141)$$

Sumamos (140) a (141) sacando factor común:

$$(k_1 + 30t_2) \cdot (1) + (t_2) \cdot (-30) = k_1$$

Por tanto

$$\begin{cases} k_2 = k_1 + 30t_2 \\ x_2 = t_2 \end{cases} \quad t_2 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_1 = 57t_0 - 96t_1 + 64$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_1 = 57t_0 - 96t_1 + 30t_2 + 64 \\ x_2 = t_2 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$$

Paso 4

Tenemos la ecuación

$$3x_0 + 74x_1 = k_2$$

Partimos de la ecuación

$$3x_0 + 74x_1 = 1$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 &= 3 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 &= 74 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = 3$ y $x_1 = 74$.

Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 74 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 24 \\ 2 & & \end{array}$$

$\Rightarrow 74 = 3 \times 24 + 2 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 24 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -24 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} 3 & & 2 \\ 1 & & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow 3 = 2 \times 1 + 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 25 & -1 & 1 \\ -24 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \Rightarrow 2 = 1 \times 2 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 2 veces la primera} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 25 & -1 & 1 \\ -74 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (25) \cdot x_0 + (-1) \cdot x_1 = 1 \\ (-74) \cdot x_0 + (3) \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (25) \cdot (3) + (-1) \cdot (74) = 1 \\ (-74) \cdot (3) + (3) \cdot (74) = 0 \end{cases} \quad (142)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(3, 74) = 1$.

La primera igualdad de (142) la tenemos que multiplicar por $q=k_2$

$$(25) \cdot (3) + (-1) \cdot (74) = 1 \Rightarrow k_2 \cdot (25) \cdot (3) + k_2 \cdot (-1) \cdot (74) = k_2 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(25k_2) \cdot (3) + (-k_2) \cdot (74) = k_2 \quad (143)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (142) por t_3

$$(-74t_3) \cdot (3) + (3t_3) \cdot (74) = 0 \quad (144)$$

Sumamos (143) a (144) sacando factor común:

$$(25k_2 - 74t_3) \cdot (3) + (-k_2 + 3t_3) \cdot (74) = k_2$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = 25k_2 - 74t_3 \\ x_1 = -k_2 + 3t_3 \end{cases} \quad t_3 \in \mathbb{Z}$$

y como

$$k_2 = 57t_0 - 96t_1 + 30t_2 + 64$$

sustituyendo y operando, obtenemos

$$\begin{cases} x_0 = 1425t_0 - 2400t_1 + 750t_2 - 74t_3 + 1600 \\ x_1 = -57t_0 + 96t_1 - 30t_2 + 3t_3 - 64 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$$

Por último, tenemos que

$$\begin{cases} x_0 = 1425t_0 - 2400t_1 + 750t_2 - 74t_3 + 1600 \\ x_1 = -57t_0 + 96t_1 - 30t_2 + 3t_3 - 64 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_0 \end{cases} \quad t_0, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}$$



19. Resuelve la ecuación diofántica

$$65x_0 - 68x_1 = -91$$

Solución

$$\begin{array}{l|l} 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow 65 = 13^1 \cdot 5^1 \quad \begin{array}{l|l} 68 & 2 \\ 34 & 2 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -68 = -17^1 \cdot 2^2 \quad \begin{array}{l|l} 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \Leftrightarrow -91 = -13^1 \cdot 7^1 \Rightarrow \text{mcd}[65, -68] = 1 \text{ que divide a } -91. \text{ Tiene solución, comencemos}$$

Paso 1

Partimos de la ecuación

$$65x_0 - 68x_1 = -91$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = 65 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = -68 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = 65$ y $x_1 = -68$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 65 \\ 0 & 1 & -68 \end{pmatrix}$$

$-68 = 65 \times -2 + 62 \Rightarrow$ Sumamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 65 \\ 2 & 1 & 62 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} 65 & 62 \\ 3 & 1 \end{array} \Rightarrow 65 = 62 \times 1 + 3 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 1 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 62 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} 62 & 3 \\ 2 & 20 \end{array} \Rightarrow 62 = 3 \times 20 + 2 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 20 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 22 & 21 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 3 = 2 \times 1 + 1 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 1 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} -23 & -22 & 1 \\ 22 & 21 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l|l} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 1 \times 2 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 2 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} -23 & -22 & 1 \\ 68 & 65 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (-23) \cdot x_0 + (-22) \cdot x_1 = 1 \\ (68) \cdot x_0 + (65) \cdot x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-23) \cdot (65) + (-22) \cdot (-68) = 1 \\ (68) \cdot (65) + (65) \cdot (-68) = 0 \end{cases} \quad (145)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(65, -68) = 1$.

La primera igualdad de (145) la tenemos que multiplicar por $q = -91$

$$(-23) \cdot (65) + (-22) \cdot (-68) = 1 \Rightarrow -91 \cdot (-23) \cdot (65) + -91 \cdot (-22) \cdot (-68) = -91 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(2093) \cdot (65) + (2002) \cdot (-68) = -91 \quad (146)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (145) por t_0

$$(68t_0) \cdot (65) + (65t_0) \cdot (-68) = 0 \quad (147)$$

Sumamos (146) a (147) sacando factor común:

$$(68t_0 + 2093) \cdot (65) + (65t_0 + 2002) \cdot (-68) = -91$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = 68t_0 + 2093 \\ x_1 = 65t_0 + 2002 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$



20. Resuelve la ecuación diofántica

$$-83x_0 + 26x_1 = -37$$

Solución

$$\begin{array}{c|c} 83 & 83 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow -83 = -83^1 \quad \begin{array}{c|c} 26 & 2 \\ \hline 13 & 13 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow 26 = 13^1 \cdot 2^1 \quad \begin{array}{c|c} 37 & 37 \\ \hline 1 & \end{array} \Leftrightarrow -37 = -37^1$$

$\Rightarrow \text{mcd}[-83, 26] = 1$ que divide a -37 . Tiene solución, comencemos

Paso 1

Partimos de la ecuación

$$-83x_0 + 26x_1 = -37$$

Consideremos el sistema $\begin{cases} 1 \cdot x_0 + 0 \cdot x_1 = -83 \\ 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 = 26 \end{cases}$ que tiene como soluciones $x_0 = -83$ y $x_1 = 26$. Su forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -83 \\ 0 & 1 & 26 \end{pmatrix}$$

$-83 = 26 \times -4 + 21 \Rightarrow$ Sumamos a la primera fila 4 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 21 \\ 0 & 1 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 26 & 21 \\ \hline 5 & 1 \end{array} \Rightarrow 26 = 21 \times 1 + 5 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 1 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 21 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 21 & 5 \\ \hline 1 & 4 \end{array} \Rightarrow 21 = 5 \times 4 + 1 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 4 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 16 & 1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 5 & 1 \\ \hline 0 & 5 \end{array} \Rightarrow 5 = 1 \times 5 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 5 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 16 & 1 \\ -26 & -83 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones equivalente al primero:

$$\begin{cases} (5) \cdot x_0 + (16) \cdot x_1 &= 1 \\ (-26) \cdot x_0 + (-83) \cdot x_1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5) \cdot (-83) + (16) \cdot (26) &= 1 \\ (-26) \cdot (-83) + (-83) \cdot (26) &= 0 \end{cases} \quad (148)$$

Además hemos obtenido que $\text{mcd}(-83, 26) = 1$.

La primera igualdad de (148) la tenemos que multiplicar por $q = -37$

$$(5) \cdot (-83) + (16) \cdot (26) = 1 \Rightarrow -37 \cdot (5) \cdot (-83) + -37 \cdot (16) \cdot (26) = -37 \cdot 1 \Rightarrow$$

$$(-185) \cdot (-83) + (-592) \cdot (26) = -37 \quad (149)$$

Multipliquemos la segunda igualdad de (148) por t_0

$$(-26t_0) \cdot (-83) + (-83t_0) \cdot (26) = 0 \quad (150)$$

Sumamos (149) a (150) sacando factor común:

$$(-26t_0 - 185) \cdot (-83) + (-83t_0 - 592) \cdot (26) = -37$$

Por tanto

$$\begin{cases} x_0 = -26t_0 - 185 \\ x_1 = -83t_0 - 592 \end{cases} \quad t_0 \in \mathbb{Z}$$

