Método de Gauss en la resolución de sistemas de ecuaciones

Resuelve y clasifica el sistema de ecuaciones por el método de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rr} x_1+2x_2-x_3+3x_4= & -8\\ 2x_1+2x_3-x_4= & 13\\ -x_1+x_2+x_3-x_4= & 8\\ 3x_1+3x_2-x_3+2x_4= & -1 \end{array}\right.$$

Solución:

Escribamos la matriz ampliada, si podemos la simplificamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -8\\ 2 & 0 & 2 & -1 & 13\\ -1 & 1 & 1 & -1 & 8\\ 3 & 3 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{ccc} F_1 & \leftrightarrows & F_1\\ F_2 & \leftrightarrows & -2F_1+F_2\\ F_3 & \leftrightarrows & F_1+F_3\\ F_4 & \leftrightarrows & -3F_1+F_4 \end{array}\right\} \longmapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -8\\ 0 & -4 & 4 & -7 & 29\\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -7 & 23 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{ccc} F_1 & \leftrightarrows & F_1\\ F_2 & \leftrightarrows & F_3\\ F_3 & \leftrightarrows & F_2\\ F_4 & \leftrightarrows & F_4 \end{array}\right\} \longmapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -8\\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -4 & 4 & -7 & 29\\ 0 & -3 & 2 & -7 & 23 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{ccc} F_1 & \leftrightarrows & F_1\\ F_2 & \leftrightarrows & F_2+F_3\\ F_3 & \leftrightarrows & F_3\\ F_4 & \leftrightarrows & F_4 \end{array}\right\} \longmapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -8\\ 0 & -1 & 4 & -5 & 29\\ 0 & -4 & 4 & -7 & 29\\ 0 & -3 & 2 & -7 & 23 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{ccc} F_1 & \leftrightarrows & F_1\\ F_2 & \leftrightarrows & F_2\\ F_3 & \leftrightarrows & -4F_2+F_3\\ F_4 & \leftrightarrows & -3F_2+F_4 \end{array}\right\} \longmapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -8\\ 0 & -1 & 4 & -5 & 29\\ 0 & 0 & -12 & 13 & -87\\ 0 & 0 & -10 & 8 & -64 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{ccc} F_1 & \leftrightarrows & F_1\\ F_2 & \leftrightarrows & F_2\\ F_3 & \leftrightarrows & F_3\\ F_4 & \leftrightarrows & \dfrac{F_4}{2} \end{array}\right\} \longmapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -8\\ 0 & -1 & 4 & -5 & 29\\ 0 & 0 & -12 & 13 & -87\\ 0 & 0 & -5 & 4 & -32 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{ccc} F_1 & \leftrightarrows & F_1\\ F_2 & \leftrightarrows & F_2\\ F_3 & \leftrightarrows & F_4\\ F_4 & \leftrightarrows & F_3 \end{array}\right\} \longmapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -8\\ 0 & -1 & 4 & -5 & 29\\ 0 & 0 & -5 & 4 & -32\\ 0 & 0 & -12 & 13 & -87 \end{pmatrix} \left\{\begin{array}{ccc} F_1 & \leftrightarrows & F_1\\ F_2 & \leftrightarrows & F_2\\ F_3 & \leftrightarrows & 5F_3-2F_4\\ F_4 & \leftrightarrows & F_4 \end{array}\right\} \longmapsto$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & -8\\ 0 & -1 & 4 & -5 & 29\\ 0 & 0 & -1 & -6 & 14\\ 0 & 0 & -12 & 13 & -87\end{pmatrix} \left\{\begin{matrix}F_1 & \leftrightarrows & F_1\\ F_2 & \leftrightarrows & F_2\\ F_3 & \leftrightarrows & F_3\\ F_4 & \leftrightarrows & -12F_3+F_4\end{matrix}\right\} \longmapsto$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & -8\\ 0 & -1 & 4 & -5 & 29\\ 0 & 0 & -1 & -6 & 14\\ 0 & 0 & 0 & 85 & -255\end{pmatrix} \left\{\begin{matrix}F_1 & \leftrightarrows & F_1\\ F_2 & \leftrightarrows & F_2\\ F_3 & \leftrightarrows & F_3\\ F_4 & \leftrightarrows & \dfrac{F_4}{85}\end{matrix}\right\} \longmapsto$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 3 & -8\\ 0 & -1 & 4 & -5 & 29\\ 0 & 0 & -1 & -6 & 14\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema escalonado

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4 = & -8\\ -x_2+4x_3-5x_4 = & 29\\ -x_3-6x_4 = & 14\\ x_4 = & -3\end{cases}$$

se obtienen de soluciones:

$$\{x_1:1,\ x_2:2,\ x_3:4,\ x_4:-3\}$$

Tipo de sistema: Sistema compatible y determinado