

Ejercicio de obtener la media y desviación típica poblacional en m.a.s.

Ejercicio

Se dispone de 6 tornillos de 3 , 5 , 7 , 8 , 9 , 10 gramos de peso respectivamente.

1. Mediante muestreo aleatorio simple, exprese todas las muestras posibles de tamaño 2.
2. Halla la media, la varianza y la desviación típica de los pesos medios muestrales.
3. Halla la media y la desviación típica de la población.
4. ¿Qué relación existe entre los resultados de los dos apartados anteriores?

Solución

1. Suponemos que hay reemplazamiento, por tanto el número de muestras posibles es $6^2 = 36 = nm$ y se obtiene de espacio muestral:

$\Omega = \{ (3, 3), (3, 5), (3, 7), (3, 8), (3, 9), (3, 10), (5, 3), (5, 5), (5, 7), (5, 8), (5, 9), (5, 10), (7, 3), (7, 5), (7, 7), (7, 8), (7, 9), (7, 10), (8, 3), (8, 5), (8, 7), (8, 8), (8, 9), (8, 10), (9, 3), (9, 5), (9, 7), (9, 8), (9, 9), (9, 10), (10, 3), (10, 5), (10, 7), (10, 8), (10, 9), (10, 10) \}$

2. Tenemos que obtener todas las medias muestrales a partir de las muestras anteriores:

$\bar{X} = \{ 3.0, 4.0, 5.0, 5.5, 6.0, 6.5, 4.0, 5.0, 6.0, 6.5, 7.0, 7.5, 5.0, 6.0, 7.0, 7.5, 8.0, 8.5, 5.5, 6.5, 7.5, 8.0, 8.5, 9.0, 6.0, 7.0, 8.0, 8.5, 9.0, 9.5, 6.5, 7.5, 8.5, 9.0, 9.5, 10.0 \}$

\bar{x}_i	f_i	$f_i \cdot \bar{x}_i$	$f_i \cdot \bar{x}_i^2$
3.00	1	3.00	9.00
4.00	2	8.00	32.00
5.00	3	15.00	75.00
5.50	2	11.00	60.50
6.00	4	24.00	144.00
6.50	4	26.00	169.00
7.00	3	21.00	147.00
7.50	4	30.00	225.00
8.00	3	24.00	192.00
8.50	4	34.00	289.00
9.00	3	27.00	243.00
9.50	2	19.00	180.50
10.00	1	10.00	100.00
	36	252.00	1866.00

Por tanto:

$$E[\bar{X}] = \frac{\sum f_i \cdot \bar{x}_i}{nm} = \frac{252,0}{36,0} = 7,0$$

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum f_i \cdot \bar{x}_i^2}{nm} - E[\bar{X}]^2 = \frac{1866,0}{36,0} - (7,0)^2 = 2,8333 \Rightarrow S_{\bar{x}} = \sqrt{2,8333} = 1,6833$$

3. Hagamos una tabla para calcularlas:

x_i	x_i^2
3	9
5	25
7	49
8	64
9	81
10	100
42	328

Por tanto

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{42}{6} = 7,0$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \mu^2 = \frac{328}{6} - (7,0)^2 = 5,6667 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5,6667} = 2,3805$$

4. De lo anterior se puede ver que (hay que tener en cuenta que $n = 2$ es el tamaño de las muestras):

$$\mu = 7,0 = E[\bar{X}]$$

$$S_{\bar{x}} = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2,3805}{\sqrt{2}} = 1,6833$$