

Potencia n-ésima de una matriz particular, inversa y ecuación matricial

Ejercicio. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calcula A^n
2. Calcula $(A^{-1})^n$
3. Resuelve la ecuación $A^3 \cdot X \cdot A + I = O$ donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

Solución.

1. Podemos hacer este apartado haciendo A^2, A^3, A^4 e intentar obtener la relación que nos permite inferir el valor de A^n o bien observar que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + B$$

$$A^2 = (I + B)^2 = (I + B) \cdot (I + B) = I^2 + 2 \cdot B + B^2$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^n = 0 \text{ si } n \geq 2$$

Por tanto:

$$A^2 = I + 2 \cdot B$$

$$A^3 = (I + B) \cdot (I + 2 \cdot B) = I + B + 2 \cdot B + 2 \cdot B^2 = I + 3 \cdot B$$

$$\text{Veamos que } A^n = I + n \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{k} & \frac{n}{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por inducción, ya hemos visto que es cierto para $n = 1$, supongamos que es cierto para n y comprobemos que es cierto para $n + 1$

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = (I + n \cdot B) \cdot (I + B) = I + n \cdot B + B + n \cdot B^2 = I + (n + 1) \cdot B$$

Por tanto podemos concluir que $A^n = I + n \cdot B \forall n \in \mathbb{N}$

2. De lo anterior podemos pensar que $(A^{-1})^n = I - n \cdot B$. Veámoslo:

■ $n = 1$

$$A \cdot (I - B) = (I + B) \cdot (I - B) = (I - B) \cdot (I + B) = I^2 - B^2 = I \Rightarrow A^{-1} = I - B$$

■ Supongamos que es cierto para n y comprobemos que es cierto para $n + 1$

$$(A^{-1})^{n+1} = (A^{-1})^n \cdot A^{-1} = (I - n \cdot B) \cdot (I - B) = I - n \cdot B - B + n \cdot B^2 = I - (n + 1) \cdot B$$

Por tanto tenemos que $(A^{-1})^n = I - n \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n}{k} & -\frac{n}{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}$

$$3. A^3 \cdot X \cdot A + I = O \Rightarrow A^3 \cdot X \cdot A = -I \Rightarrow X = (A^{-1})^3 \cdot (-I) \cdot A^{-1} = -(A^{-1})^4 = -(I - 4 \cdot B) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{k} & \frac{1}{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{k} & \frac{4}{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{4}{k} & \frac{4}{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

www.picasa.org

Esta obra está bajo una licencia Creative Commons “Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional”.

