

# Simétrico de un punto respecto de un plano en el espacio

Paco Villegas

**Ejercicio.** Halla el punto simétrico de  $P(-1, -4, 0)$  con respecto al plano que pasa por los puntos  $A(0, 1, 3)$ ,  $B(-6, -3, 3)$  y  $C(6, -8, 16)$ .

**Solución.** En primer lugar obtengamos los elementos que me permiten hallar la ecuación general del plano, lo podemos hacer a partir de obtener dos vectores directores y un punto

**Nota:** los vectores directores es mejor simplificarlos dividiéndolos por un factor común, lo mismo se debe hacer con el vector normal que se obtiene después

$$A(0, 1, 3)$$

$$\vec{u} = \vec{AB} = (-6, -3, 3) - (0, 1, 3) = (-6, -4, 0) \equiv (-3, -2, 0)$$

$$\vec{v} = \vec{AC} = (6, -8, 16) - (0, 1, 3) = (6, -9, 13) \equiv (6, -9, 13)$$

y con esa información obtener la ecuación general a partir de:

$$1. \begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ -3 & -2 & 0 \\ 6 & -9 & 13 \end{vmatrix} = -26x + 39y + 39z - 156 = 0$$

2. O bien obtener un vector normal haciendo el producto vectorial de los dos vectores directores del plano y luego obtener la  $D$  imponiendo que la ecuación obtenida pase por uno de los puntos.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -9 & 13 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 13 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} \right) = (-26 \ 39 \ 39) \Rightarrow$$

$$\vec{n}_\pi \equiv (2, -3, -3)$$

$$2 \cdot x + (-3) \cdot y + (-3) \cdot z + D = 0 \Rightarrow (2) \cdot (0) + (-3) \cdot (1) + (-3) \cdot (3) + D = 0$$

$$(0) + (-3) + (-9) + D = 0 \Rightarrow -12 + D = 0 \Rightarrow D = 12$$

**Nota:** También podemos obtener de forma directa la ecuación a partir de que  $D = \vec{n}_\pi \cdot \vec{OA} = (2, -3, -3) \cdot (0, 1, 3) = 12$

En cualquier caso, se obtendría que la ecuación del plano ya simplificada es:

$$\pi \equiv 2x - 3y - 3z + 12 = 0$$

Obtengamos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por  $P$  y es perpendicular al plano (podemos usar como vector director el normal al plano que es  $(2, -3, -3)$ ):

$$r \equiv \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t - 4 \\ z = -3t \end{cases}$$

Si sustituimos el resultado anterior en la ecuación del plano  $\pi$  (simplificado) se obtiene el valor de  $t$  que nos permite hallar el punto de intersección

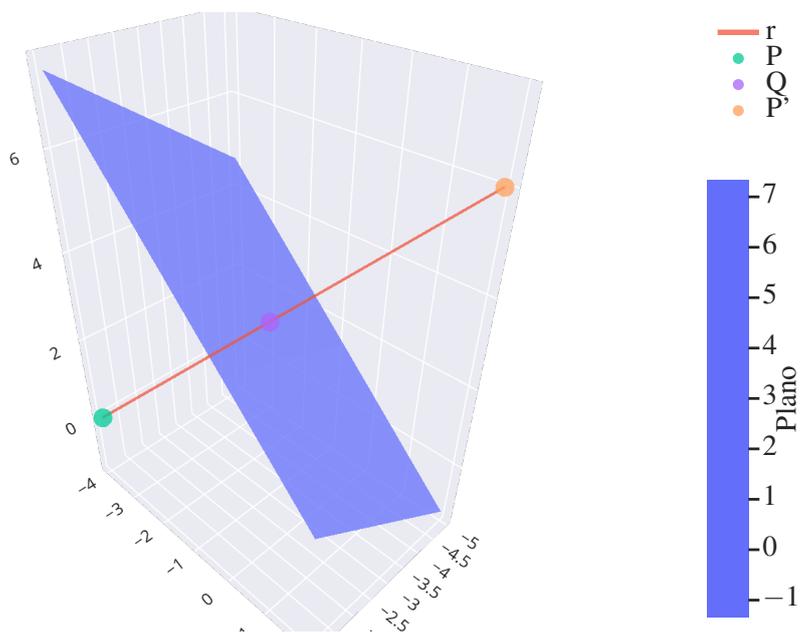
$$(2) \cdot (2t - 1) + (-3) \cdot (-3t - 4) + (-3) \cdot (-3t) + (12) = 0$$

$$\Rightarrow 22t + 22 = 0 \Rightarrow t = -1$$

Por tanto son secantes y el punto de intersección es  $Q(-3, -1, 3)$  (se obtiene sustituyendo el valor anterior del parámetro en la ecuación de la recta).

Ese punto es el punto medio de  $P$  y su simétrico, aplicando la fórmula del punto medio obtenemos que el punto pedido es

$$P' = P + 2 \cdot \vec{PQ} = (-1, -4, 0) + 2 \cdot ((-3, -1, 3) - (-1, -4, 0)) = (-1, -4, 0) + 2 \cdot (-2, 3, 3) = (-5, 2, 6)$$



Esta obra está bajo una licencia Creative Commons “Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional”.

