Estudio de un sistema 3x3 con un parámetro

Ejercicio. Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -2x+y(-t-2)+4z & =8 \\ x(-t-1)-2y+4z & =6 \\ -x-y+z(3-t) & =t+11 \end{cases}$

1. Estudia la compatibilidad del sistema a partir del parámetro t.
2. Resuelve el sistema por el método de Gauss para $t=2$.
3. Resuelve el sistema para $t=-2$.

Solución.

1. $|M_c| = \begin{vmatrix} -2 & -t-2 & 4 \\ -t-1 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 3-t \end{vmatrix} = t^3-3t+2 = (t-1)^2(t+2) \Rightarrow (t-1)^2(t+2)=0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} t= & -2 \\ t= & 1 \end{array} \right.$

   Usando el Teorema de Rouché–Frobenius:

   - Si $t \neq -2$ y $t \neq 1 \Rightarrow |M_c| \neq 0 \Rightarrow Rango(M_c) = Rango(M_a) = 3 = N^o\ Incógnitas \Rightarrow SCD$
   - Si $t=-2$, tenemos que $M_a = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$. Si hacemos Gauss en la matriz ampliada se obtiene algo similar a

   $$M_a = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Por tanto $Rango(M_a) = 2 = Rango(M_c) = 2 \Rightarrow$ SCI que depende de un parámetro.

   - Si $t=1$, tenemos que $M_a = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 8 \\ -2 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & 12 \end{pmatrix}$. Si hacemos Gauss en la matriz ampliada se obtiene algo similar a

   $$M_a = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 8 \\ -2 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & 12 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto $Rango(M_a) = 3 \neq Rango(M_c) = 2 \Rightarrow$ es un SI.

2. Para $t=2$ quedaría el sistema de matriz ampliada $M_a = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 & 8 \\ -3 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 13 \end{pmatrix}$ y ya sabemos que el sistema es compatible y determinado. Si hacemos Gauss en la matriz ampliada se obtiene algo similar a

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 & 8 \\ -3 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 1 & 13 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 42 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 21 \end{pmatrix}$$

A partir de lo anterior, resolviendo el sistema escalonado, se obtiene de solución:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -22 \\ y & = & -12 \\ z & = & -21 \end{array} \right.$$

3. Para $t = -2$ ya sabemos que el sistema es compatible indeterminado y que la matriz ampliada es $M_a = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$. Basándonos en lo que ya hemos obtenido anteriormente, tenemos que

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & 5 & 9 \end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y se obtiene de solución:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2t-4 \\ y & = & 3t-5 \quad t \in \mathbb{R} \\ z & = & t \end{array} \right.$$

www.picasa.org