Sistemas lineales de congruencias: Teorema chino del resto

Teorema chino del resto: Si en el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1x & \equiv & b_1 \ (\text{mod } n_1) \\ a_2x & \equiv & b_2 \ (\text{mod } n_2) \\ & \vdots & \\ a_sx & \equiv & b_s \ (\text{mod } n_s) \end{array}\right\}$$

se verifica que $mcd(n_i, n_j) = 1 \ \forall i \neq j$, y que $mcd(a_i, n_i) = 1 \ \forall i$, entonces tiene solución, que será única módulo $n_1 \cdot n_2 \cdots n_s$.

1. **Resuelve** $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{15} \\ x \equiv 1 \pmod{16} \end{cases}$

   Solución Comprobemos que los módulos son coprimos dos a dos:

   $$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

   mcd(15,16)=1
   La solución de la última ecuación es:
   $x = 16t_2 + 1 \Rightarrow$
   $1 + 16t_2 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 16t_2 \equiv 0 \pmod{15}$ y como $16 = 15 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 1t_2 \equiv 0 \pmod{15}$
   $t_2 = 15t_1$
   $x = 16t_2 + 1 \Rightarrow x = 16 \cdot (15t_1) + 1 \Rightarrow$
   $x = 240t_1 + 1$

   $$\boldsymbol{x = 240t_1 + 1 \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod{240}}$$

   Solución directa con sympy: $x = 240t_1 + 1$
   Comprobación:
   $1 = 15 \cdot 0 + 1$
   $1 = 16 \cdot 0 + 1$

2. **Resuelve** $\begin{cases} 118x \equiv 18 \pmod{169} \\ 238x \equiv 38 \pmod{221} \end{cases}$

   Solución Comprobemos que los módulos son coprimos dos a dos:

   $$\begin{array}{r|l} 169 & 13 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 221 & 13 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

   mcd(169,221)=13

   No podemos aplicar el teorema

3. **Resuelve** $\begin{cases} 2x \equiv 5 \pmod{3} \\ 3x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$

Solución Comprobemos que los módulos son coprimos dos a dos:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

mcd(3,7)=1

Obtengamos el inverso de 2 módulo 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 3 & \underline{2} \\ 1 & 1 \end{array}$ $\Rightarrow 3 = 1 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 3 - 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 2 & \underline{1} \\ 0 & 2 \end{array}$ $\Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $2^{-1} = -1 \equiv 2 \pmod 3$ y el mcd(2 , 3)=1

Obtengamos el inverso de 3 módulo 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 7 & \underline{3} \\ 1 & 2 \end{array}$ $\Rightarrow 7 = 2 \cdot 3 + 1 \Rightarrow 7 - 2 \cdot 3 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 3 & \underline{1} \\ 0 & 3 \end{array}$ $\Rightarrow 3 = 3 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 3 - 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $3^{-1} = -2 \equiv 5 \pmod 7$ y el mcd(3 , 7)=1

Tenemos las ecuaciones nuevas:

$2x \equiv 5 \pmod 3 \Rightarrow x \equiv 2^{-1} \cdot 5 \pmod 3 \equiv 2 \cdot 5 \pmod 3 \equiv 10 \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3$

$3x \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 3^{-1} \cdot 2 \pmod 7 \equiv 5 \cdot 2 \pmod 7 \equiv 10 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$

El sistema original quedaría $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 7 \end{cases}$

La solución de la última ecuación es:

$x = 7t_2 + 3 \Rightarrow$

$3 + 7t_2 \equiv 1 \pmod 3$ y como $3 = 3 \cdot 1 \Rightarrow 0 + 7t_2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 7t_2 \equiv 1 \pmod 3$ y como $7 = 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 1t_2 \equiv 1 \pmod 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 3 & \underline{1} \\ 0 & 3 \end{array}$ $\Rightarrow 3 = 3 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 3 - 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 3 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $1^{-1} = 1 \Rightarrow$
$t_2 \equiv 1 \cdot 1 \pmod 3 \Rightarrow t_2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow t_2 \equiv 1 \pmod 3$
$t_2 = 3t_1 + 1$
$x = 7t_2 + 3 \Rightarrow x = 7 \cdot (3t_1 + 1) + 3 \Rightarrow$
$x = 21t_1 + 10$

$$\boldsymbol{x = 21t_1 + 10 \Leftrightarrow x \equiv 10 \pmod{21}}$$

Solución directa con sympy: $x = 21t_1 + 10$
Comprobación:
$2 \cdot 10 = 20 = 3 \cdot 6 + 2$ y $5 = 3 \cdot 1 + 2$
$3 \cdot 10 = 30 = 7 \cdot 4 + 2$

4. **Resuelve** $\begin{cases} 168x \equiv 24 \pmod{220} \\ 56x \equiv 40 \pmod{69} \end{cases}$

Solución Comprobemos que los módulos son coprimos dos a dos:

$$\begin{array}{r|l} 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 69 & 3 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

mcd(220,69)=1

Obtengamos el inverso de 168 módulo 220

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 168 \\ 0 & 1 & 220 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 220 & 168 \\ \hline 52 & 1 \end{array} \Rightarrow 220 = 1 \cdot 168 + 52 \Rightarrow 220 - 1 \cdot 168 = 52 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 168 \\ -1 & 1 & 52 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 168 & 52 \\ \hline 12 & 3 \end{array} \Rightarrow 168 = 3 \cdot 52 + 12 \Rightarrow 168 - 3 \cdot 52 = 12 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 12 \\ -1 & 1 & 52 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 52 & 12 \\ \hline 4 & 4 \end{array} \Rightarrow 52 = 4 \cdot 12 + 4 \Rightarrow 52 - 4 \cdot 12 = 4 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 4 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 12 \\ -17 & 13 & 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 12 & 4 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \Rightarrow 12 = 3 \cdot 4 + 0 \Rightarrow 12 - 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 55 & -42 & 0 \\ -17 & 13 & 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto $168^{-1} = -17 \equiv 203 \pmod{220}$ y el mcd(168 , 220)=4

No podemos aplicar el teorema

5. **Resuelve** $\begin{cases} 168x \equiv 24 \pmod{221} \\ 56x \equiv 40 \pmod{69} \end{cases}$

Solución Comprobemos que los módulos son coprimos dos a dos:

$$\begin{array}{r|rr|l} 221 & 13 & 69 & 3 \\ 17 & 17 & 23 & 23 \\ 1 & & 1 & \end{array}$$

mcd(221,69)=1

Obtengamos el inverso de 168 módulo 221

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 168 \\ 0 & 1 & 221 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 2\,2\,1 & 1\,6\,8 \\ \hline 5\,3 & 1 \end{array}$ $\Rightarrow 221 = 1 \cdot 168 + 53 \Rightarrow 221 - 1 \cdot 168 = 53 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 168 \\ -1 & 1 & 53 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 1\,6\,8 & 5\,3 \\ \hline 9 & 3 \end{array}$ $\Rightarrow 168 = 3 \cdot 53 + 9 \Rightarrow 168 - 3 \cdot 53 = 9 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & 53 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 5\,3 & 9 \\ \hline 8 & 5 \end{array}$ $\Rightarrow 53 = 5 \cdot 9 + 8 \Rightarrow 53 - 5 \cdot 9 = 8 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 5 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 \\ -21 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 9 & 8 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$ $\Rightarrow 9 = 1 \cdot 8 + 1 \Rightarrow 9 - 1 \cdot 8 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 25 & -19 & 1 \\ -21 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 8 & 1 \\ \hline 0 & 8 \end{array}$ $\Rightarrow 8 = 8 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 8 - 8 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 8 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 25 & -19 & 1 \\ -221 & 168 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $168^{-1} = 25$ y el mcd(168 , 221)=1

Obtengamos el inverso de 56 módulo 69

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 56 \\ 0 & 1 & 69 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 6\,9 & 5\,6 \\ \hline 1\,3 & 1 \end{array}$ $\Rightarrow 69 = 1 \cdot 56 + 13 \Rightarrow 69 - 1 \cdot 56 = 13 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 56 \\ -1 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 5\,6 & 1\,3 \\ \hline 4 & 4 \end{array}$ $\Rightarrow 56 = 4 \cdot 13 + 4 \Rightarrow 56 - 4 \cdot 13 = 4 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 4 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 3 \end{array}$ $\Rightarrow 13 = 3 \cdot 4 + 1 \Rightarrow 13 - 3 \cdot 4 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 3 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ -16 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 4 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array}$ $\Rightarrow 4 = 4 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 4 - 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 4 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 69 & -56 & 0 \\ -16 & 13 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $56^{-1} = -16 \equiv 53 \pmod{69}$ y el mcd(56 , 69)=1
Tenemos las ecuaciones nuevas:
$168x \equiv 24 \pmod{221} \Rightarrow x \equiv 168^{-1} \cdot 24 \pmod{221} \equiv 25 \cdot 24 \pmod{221} \equiv 600 \pmod{221} \equiv 158 \pmod{221}$
$56x \equiv 40 \pmod{69} \Rightarrow x \equiv 56^{-1} \cdot 40 \pmod{69} \equiv 53 \cdot 40 \pmod{69} \equiv 2120 \pmod{69} \equiv 50 \pmod{69}$

El sistema original quedaría $\begin{cases} x \equiv 158 \pmod{221} \\ x \equiv 50 \pmod{69} \end{cases}$
La solución de la última ecuación es:
$x = 69t_2 + 50 \Rightarrow$
$50 + 69t_2 \equiv 158 \pmod{221} \Rightarrow 69t_2 \equiv 108 \pmod{221}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 69 \\ 0 & 1 & 221 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 221 & 69 \\ \cline{2-2} 14 & 3 \end{array}$ $\Rightarrow 221 = 3 \cdot 69 + 14 \Rightarrow 221 - 3 \cdot 69 = 14 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 3 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 69 \\ -3 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 69 & 14 \\ \cline{2-2} 13 & 4 \end{array}$ $\Rightarrow 69 = 4 \cdot 14 + 13 \Rightarrow 69 - 4 \cdot 14 = 13 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 4 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 13 & -4 & 13 \\ -3 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 14 & 13 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$ $\Rightarrow 14 = 1 \cdot 13 + 1 \Rightarrow 14 - 1 \cdot 13 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 13 & -4 & 13 \\ -16 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 13 & 1 \\ \cline{2-2} 03 & 13 \\ 0 & \end{array}$ $\Rightarrow 13 = 13 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 13 - 13 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 13 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 221 & -69 & 0 \\ -16 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $69^{-1} = -16 \equiv 205 \pmod{221} \Rightarrow$
$t_2 \equiv 205 \cdot 108 \pmod{221} \Rightarrow t_2 \equiv 22140 \pmod{221} \Rightarrow t_2 \equiv 40 \pmod{221}$
$t_2 = 221t_1 + 40$

$x = 69t_2 + 50 \Rightarrow x = 69 \cdot (221t_1 + 40) + 50 \Rightarrow$
$x = 15249t_1 + 2810$

$$\boldsymbol{x = 15249t_1 + 2810 \Leftrightarrow x \equiv 2810 \pmod{15249}}$$

Solución directa con sympy: $x = 15249t_1 + 2810$
Comprobación:
$168 \cdot 2810 = 472080 = 221 \cdot 2136 + 24$
$56 \cdot 2810 = 157360 = 69 \cdot 2280 + 40$

6. **Resuelve** $\begin{cases} x \equiv 5495 \pmod{7643} \\ x \equiv 7569 \pmod{8765} \end{cases}$

Solución Comprobemos que los módulos son coprimos dos a dos:

$$\begin{array}{r|l} 7643 & 7643 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8765 & 5 \\ 1753 & 1753 \\ 1 & \end{array}$$

mcd(7643,8765)=1
La solución de la última ecuación es:
$x = 8765t_2 + 7569 \Rightarrow$
$7569 + 8765t_2 \equiv 5495 \pmod{7643} \Rightarrow 8765t_2 \equiv -2074 \pmod{7643} \Rightarrow 8765t_2 \equiv 5569 \pmod{7643}$ y como $8765 = 7643 \cdot 1 + 1122 \Rightarrow 1122t_2 \equiv 5569 \pmod{7643}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1122 \\ 0 & 1 & 7643 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 7643 & 1122 \\ \hline 911 & 6 \end{array}$ $\Rightarrow 7643 = 6 \cdot 1122 + 911 \Rightarrow 7643$ - $6 \cdot 1122 = 911 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 6 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1122 \\ -6 & 1 & 911 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 1122 & 911 \\ \hline 211 & 1 \end{array}$ $\Rightarrow 1122 = 1 \cdot 911 + 211 \Rightarrow 1122$ - $1 \cdot 911 = 211 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 211 \\ -6 & 1 & 911 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 911 & 211 \\ \hline 67 & 4 \end{array}$ $\Rightarrow 911 = 4 \cdot 211 + 67 \Rightarrow 911$ - $4 \cdot 211 = 67 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 4 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 211 \\ -34 & 5 & 67 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 211 & 67 \\ \hline 10 & 3 \end{array}$ $\Rightarrow 211 = 3 \cdot 67 + 10 \Rightarrow 211$ - $3 \cdot 67 = 10 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 109 & -16 & 10 \\ -34 & 5 & 67 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 67 & 10 \\ \hline 7 & 6 \end{array}$ $\Rightarrow 67 = 6 \cdot 10 + 7 \Rightarrow 67$ - $6 \cdot 10 = 7 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 6 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 109 & -16 & 10 \\ -688 & 101 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\ 0 & 7 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \Rightarrow 10 = 1 \cdot 7 + 3 \Rightarrow 10 \text{ - } 1 \cdot 7 = 3 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 1 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 797 & -117 & 3 \\ -688 & 101 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \Rightarrow 7 = 2 \cdot 3 + 1 \Rightarrow 7 \text{ - } 2 \cdot 3 = 1 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 2 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 797 & -117 & 3 \\ -2282 & 335 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \Rightarrow 3 = 3 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 3 \text{ - } 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 3 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 7643 & -1122 & 0 \\ -2282 & 335 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $1122^{-1} = -2282 \equiv 5361 \pmod{7643} \Rightarrow$
$t_2 \equiv 5361 \cdot 5569 \pmod{7643} \Rightarrow t_2 \equiv 29855409 \pmod{7643} \Rightarrow t_2 \equiv 1851 \pmod{7643}$
$t_2 = 7643t_1 + 1851$
$x = 8765t_2 + 7569 \Rightarrow x = 8765 \cdot (7643t_1 + 1851) + 7569 \Rightarrow$
$x = 66990895t_1 + 16231584$

$$\boldsymbol{x = 66990895t_1 + 16231584 \Leftrightarrow x \equiv 16231584 \pmod{66990895}}$$

Solución directa con sympy: $x = 66990895t_1 + 16231584$
Comprobación:
$16231584 = 7643 \cdot 2123 + 5495$
$16231584 = 8765 \cdot 1851 + 7569$

7. **Resuelve** $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$

Solución Comprobemos que los módulos son coprimos dos a dos:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

mcd(3,5)=1, mcd(3,7)=1, mcd(5,7)=1
La solución de la última ecuación es:
$x = 7t_3 + 2 \Rightarrow$
$2 + 7t_3 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 7t_3 \equiv 1 \pmod{5}$ y como $7 = 5 \cdot 1 + 2 \Rightarrow 2t_3 \equiv 1 \pmod{5}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \Rightarrow 5 = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 5 \text{ - } 2 \cdot 2 = 1 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 2 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 \text{ - } 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 2 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $2^{-1} = -2 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow$
$t_3 \equiv 3 \cdot 1 \pmod{5} \Rightarrow t_3 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow t_3 \equiv 3 \pmod{5}$
$t_3 = 5t_2 + 3 \Rightarrow$
$x = 7t_3 + 2 \Rightarrow x = 7 \cdot (5t_2 + 3) + 2 \Rightarrow$
$x = 35t_2 + 23 \Rightarrow$
$23 + 35t_2 \equiv 2 \pmod{3}$ y como $23 = 3 \cdot 7 + 2 \Rightarrow 2 + 35t_2 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 35t_2 \equiv 0 \pmod{3}$
y como $35 = 3 \cdot 11 + 2 \Rightarrow 2t_2 \equiv 0 \pmod{3}$
$t_2 = 3t_1$
$x = 35t_2 + 23 \Rightarrow x = 35 \cdot (3t_1) + 23 \Rightarrow$
$x = 105t_1 + 23$

$$\boldsymbol{x = 105t_1 + 23 \Leftrightarrow x \equiv 23 \pmod{105}}$$

Solución directa con sympy: $x = 105t_1 + 23$
Comprobación:
$23 = 3 \cdot 7 + 2$
$23 = 5 \cdot 4 + 3$
$23 = 7 \cdot 3 + 2$

8. **Resuelve** $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \\ 2x \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$

Solución Comprobemos que los módulos son coprimos dos a dos:

$\begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$

mcd(2,3)=1, mcd(2,5)=1, mcd(3,5)=1

Obtengamos el inverso de 3 módulo 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 3 = 1 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 3 - 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $3^{-1} = 1$ y el mcd(3 , 2)=1

Obtengamos el inverso de 2 módulo 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \Rightarrow 5 = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 5 - 2 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 2 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $2^{-1} = -2 \equiv 3 \pmod 5$ y el mcd(2 , 5)=1

Tenemos las ecuaciones nuevas:

$3x \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow x \equiv 3^{-1} \cdot 1 \pmod 2 \equiv 1 \cdot 1 \pmod 2 \equiv 1 \pmod 2$

$2x \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow x \equiv 2^{-1} \cdot 3 \pmod 5 \equiv 3 \cdot 3 \pmod 5 \equiv 9 \pmod 5 \equiv 4 \pmod 5$

El sistema original quedaría $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$

La solución de la última ecuación es:

$x = 5t_3 + 4 \Rightarrow$

$4 + 5t_3 \equiv 1 \pmod 3$ y como $4 = 3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow 1 + 5t_3 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 5t_3 \equiv 0 \pmod 3$ y como $5 = 3 \cdot 1 + 2 \Rightarrow 2t_3 \equiv 0 \pmod 3$

$t_3 = 3t_2 \Rightarrow$

$x = 5t_3 + 4 \Rightarrow x = 5 \cdot (3t_2) + 4 \Rightarrow$

$x = 15t_2 + 4 \Rightarrow$

$4 + 15t_2 \equiv 1 \pmod 2$ y como $4 = 2 \cdot 2 \Rightarrow 0 + 15t_2 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow 15t_2 \equiv 1 \pmod 2$ y como $15 = 2 \cdot 7 + 1 \Rightarrow 1t_2 \equiv 1 \pmod 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 2 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $1^{-1} = 1 \Rightarrow$

$t_2 \equiv 1 \cdot 1 \pmod 2 \Rightarrow t_2 \equiv 1 \pmod 2 \Rightarrow t_2 \equiv 1 \pmod 2$

$t_2 = 2t_1 + 1$

$x = 15t_2 + 4 \Rightarrow x = 15 \cdot (2t_1 + 1) + 4 \Rightarrow$

$x = 30t_1 + 19$

$$\boldsymbol{x = 30t_1 + 19 \Leftrightarrow x \equiv 19 \pmod{30}}$$

Solución directa con sympy: $x = 30t_1 + 19$

Comprobación:

$3 \cdot 19 = 57 = 2 \cdot 28 + 1$

$19 = 3 \cdot 6 + 1$

$2 \cdot 19 = 38 = 5 \cdot 7 + 3$

9. **Resuelve** $\begin{cases} 6x \equiv 2 \pmod{25} \\ 5x \equiv 2 \pmod 7 \\ 7x \equiv 3 \pmod{18} \end{cases}$

Solución Comprobemos que los módulos son coprimos dos a dos:

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

mcd(25,7)=1, mcd(25,18)=1, mcd(7,18)=1

Obtengamos el inverso de 6 módulo 25

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 25 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 25 & 6 \\ \cline{2-2} 1 & 4 \end{array} \Rightarrow 25 = 4 \cdot 6 + 1 \Rightarrow 25 - 4 \cdot 6 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 4 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 6 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array} \Rightarrow 6 = 6 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 6 - 6 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 6 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 25 & -6 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $6^{-1} = -4 \equiv 21 \pmod{25}$ y el mcd(6 , 25)=1

Obtengamos el inverso de 5 módulo 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array} \Rightarrow 7 = 1 \cdot 5 + 2 \Rightarrow 7 - 1 \cdot 5 = 2 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array} \Rightarrow 5 = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 5 - 2 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $5^{-1} = 3$ y el mcd(5 , 7)=1

Obtengamos el inverso de 7 módulo 18

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 18 & 7 \\ \cline{2-2} 4 & 2 \end{array} \Rightarrow 18 = 2 \cdot 7 + 4 \Rightarrow 18 - 2 \cdot 7 = 4 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array} \Rightarrow 7 = 1 \cdot 4 + 3 \Rightarrow 7 - 1 \cdot 4 = 3 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 4 = 1 \cdot 3 + 1 \Rightarrow 4 - 1 \cdot 3 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array} \Rightarrow 3 = 3 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 3 - 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 18 & -7 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $7^{-1} = -5 \equiv 13 \pmod{18}$ y el mcd(7 , 18)=1
Tenemos las ecuaciones nuevas:
$6x \equiv 2 \pmod{25} \Rightarrow x \equiv 6^{-1} \cdot 2 \pmod{25} \equiv 21 \cdot 2 \pmod{25} \equiv 42 \pmod{25} \equiv 17 \pmod{25}$
$5x \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 5^{-1} \cdot 2 \pmod{7} \equiv 3 \cdot 2 \pmod{7} \equiv 6 \pmod{7}$
$7x \equiv 3 \pmod{18} \Rightarrow x \equiv 7^{-1} \cdot 3 \pmod{18} \equiv 13 \cdot 3 \pmod{18} \equiv 39 \pmod{18} \equiv 3 \pmod{18}$

El sistema original quedaría $\begin{cases} x \equiv 17 \pmod{25} \\ x \equiv 6 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{18} \end{cases}$

La solución de la última ecuación es:
$x = 18t_3 + 3 \Rightarrow$
$3 + 18t_3 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow 18t_3 \equiv 3 \pmod{7}$ y como $18 = 7 \cdot 2 + 4 \Rightarrow 4t_3 \equiv 3 \pmod{7}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array} \Rightarrow 7 = 1 \cdot 4 + 3 \Rightarrow 7 - 1 \cdot 4 = 3 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 4 = 1 \cdot 3 + 1 \Rightarrow 4 - 1 \cdot 3 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array} \Rightarrow 3 = 3 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 3 - 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 3 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $4^{-1} = 2 \Rightarrow$
$t_3 \equiv 2 \cdot 3 \pmod{7} \Rightarrow t_3 \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow t_3 \equiv 6 \pmod{7}$
$t_3 = 7t_2 + 6 \Rightarrow$
$x = 18t_3 + 3 \Rightarrow x = 18 \cdot (7t_2 + 6) + 3 \Rightarrow$
$x = 126t_2 + 111 \Rightarrow$
$111 + 126t_2 \equiv 17 \pmod{25}$ y como $111 = 25 \cdot 4 + 11 \Rightarrow 11 + 126t_2 \equiv 17 \pmod{25} \Rightarrow 126t_2 \equiv 6 \pmod{25}$ y como $126 = 25 \cdot 5 + 1 \Rightarrow 1t_2 \equiv 6 \pmod{25}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 2\ 5 & 1 \\ \hline 0\ 5 & 2\ 5 \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ 25 = 25 · 1 + 0 $\Rightarrow$ 25 - 25 · 1 = 0 $\Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 25 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -25 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $1^{-1} = 1 \Rightarrow$
$t_2 \equiv 1 \cdot 6 \pmod{25} \Rightarrow t_2 \equiv 6 \pmod{25} \Rightarrow t_2 \equiv 6 \pmod{25}$
$t_2 = 25t_1 + 6$
$x = 126t_2 + 111 \Rightarrow x = 126 \cdot (25t_1 + 6) + 111 \Rightarrow$
$x = 3150t_1 + 867$

$$\boldsymbol{x = 3150t_1 + 867 \Leftrightarrow x \equiv 867 \pmod{3150}}$$

Solución directa con sympy: $x = 3150t_1 + 867$
Comprobación:
$6 \cdot 867 = 5202 = 25 \cdot 208 + 2$
$5 \cdot 867 = 4335 = 7 \cdot 619 + 2$
$7 \cdot 867 = 6069 = 18 \cdot 337 + 3$

10. **Resuelve** $\begin{cases} 39x \equiv 4 \pmod{187} \\ 2x \equiv 27 \pmod{135} \\ 10x \equiv 19 \pmod{329} \end{cases}$

Solución Comprobemos que los módulos son coprimos dos a dos:

$$\begin{array}{r|l} 187 & 11 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 329 & 7 \\ 47 & 47 \\ 1 & \end{array}$$

mcd(187,135)=1, mcd(187,329)=1, mcd(135,329)=1

Obtengamos el inverso de 39 módulo 187

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 39 \\ 0 & 1 & 187 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\ 8\ 7 & 3\ 9 \\ \hline 3\ 1 & 4 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 187 = 4 · 39 + 31 $\Rightarrow$ 187 - 4 · 39 = 31 $\Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 4 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 39 \\ -4 & 1 & 31 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 3\ 9 & 3\ 1 \\ \hline 8 & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 39 = 1 · 31 + 8 $\Rightarrow$ 39 - 1 · 31 = 8 $\Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 \\ -4 & 1 & 31 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 3\ 1 & 8 \\ \hline 7 & 3 \end{array}$$

$\Rightarrow$ 31 = 3 · 8 + 7 $\Rightarrow$ 31 - 3 · 8 = 7 $\Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 3 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 \\ -19 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 7 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$ $\Rightarrow 8 = 1 \cdot 7 + 1 \Rightarrow 8 - 1 \cdot 7 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 24 & -5 & 1 \\ -19 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 1 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$$ $\Rightarrow 7 = 7 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 7 - 7 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 7 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 24 & -5 & 1 \\ -187 & 39 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $39^{-1} = 24$ y el mcd(39 , 187)=1

Obtengamos el inverso de 2 módulo 135

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 135 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\,3\,5 & 2 \\ \hline 1\,5 & 6\,7 \\ 1 & \end{array}$$ $\Rightarrow 135 = 67 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 135 - 67 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 67 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -67 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$ $\Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 135 & -2 & 0 \\ -67 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $2^{-1} = -67 \equiv 68 \pmod{135}$ y el mcd(2 , 135)=1

Obtengamos el inverso de 10 módulo 329

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 329 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 3\,2\,9 & 1\,0 \\ \hline 2\,9 & 3\,2 \\ 9 & \end{array}$$ $\Rightarrow 329 = 32 \cdot 10 + 9 \Rightarrow 329 - 32 \cdot 10 = 9 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 32 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ -32 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\,0 & 9 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$ $\Rightarrow 10 = 1 \cdot 9 + 1 \Rightarrow 10 - 1 \cdot 9 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 33 & -1 & 1 \\ -32 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 1 \\ \hline 0 & 9 \end{array}$$ $\Rightarrow 9 = 9 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 9 - 9 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 9 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 33 & -1 & 1 \\ -329 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $10^{-1} = 33$ y el mcd(10 , 329)=1

Tenemos las ecuaciones nuevas:

$39x \equiv 4 \pmod{187} \Rightarrow x \equiv 39^{-1} \cdot 4 \pmod{187} \equiv 24 \cdot 4 \pmod{187} \equiv 96 \pmod{187}$

$2x \equiv 27 \pmod{135} \Rightarrow x \equiv 2^{-1} \cdot 27 \pmod{135} \equiv 68 \cdot 27 \pmod{135} \equiv 1836 \pmod{135} \equiv 81 \pmod{135}$
$10x \equiv 19 \pmod{329} \Rightarrow x \equiv 10^{-1} \cdot 19 \pmod{329} \equiv 33 \cdot 19 \pmod{329} \equiv 627 \pmod{329} \equiv 298 \pmod{329}$

El sistema original quedaría $\begin{cases} x \equiv 96 \pmod{187} \\ x \equiv 81 \pmod{135} \\ x \equiv 298 \pmod{329} \end{cases}$

La solución de la última ecuación es:
$x = 329t_3 + 298 \Rightarrow$
$298 + 329t_3 \equiv 81 \pmod{135}$ y como $298 = 135 \cdot 2 + 28 \Rightarrow 28 + 329t_3 \equiv 81 \pmod{135}$ $\Rightarrow 329t_3 \equiv 53 \pmod{135}$ y como $329 = 135 \cdot 2 + 59 \Rightarrow 59t_3 \equiv 53 \pmod{135}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 59 \\ 0 & 1 & 135 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 135 & 59 \\ \cline{2-2} 17 & 2 \end{array} \Rightarrow 135 = 2 \cdot 59 + 17 \Rightarrow 135 - 2 \cdot 59 = 17 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 59 \\ -2 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 59 & 17 \\ \cline{2-2} 8 & 3 \end{array} \Rightarrow 59 = 3 \cdot 17 + 8 \Rightarrow 59 - 3 \cdot 17 = 8 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 8 \\ -2 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 17 & 8 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array} \Rightarrow 17 = 2 \cdot 8 + 1 \Rightarrow 17 - 2 \cdot 8 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 8 \\ -16 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 8 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 8 \end{array} \Rightarrow 8 = 8 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 8 - 8 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 8 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 135 & -59 & 0 \\ -16 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $59^{-1} = -16 \equiv 119 \pmod{135} \Rightarrow$
$t_3 \equiv 119 \cdot 53 \pmod{135} \Rightarrow t_3 \equiv 6307 \pmod{135} \Rightarrow t_3 \equiv 97 \pmod{135}$
$t_3 = 135t_2 + 97 \Rightarrow$
$x = 329t_3 + 298 \Rightarrow x = 329 \cdot (135t_2 + 97) + 298 \Rightarrow$
$x = 44415t_2 + 32211 \Rightarrow$
$32211 + 44415t_2 \equiv 96 \pmod{187}$ y como $32211 = 187 \cdot 172 + 47 \Rightarrow 47 + 44415t_2 \equiv 96 \pmod{187} \Rightarrow 44415t_2 \equiv 49 \pmod{187}$ y como $44415 = 187 \cdot 237 + 96 \Rightarrow 96t_2 \equiv 49 \pmod{187}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 96 \\ 0 & 1 & 187 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 187 & 96 \\ \cline{2-2} 91 & 1 \end{array} \Rightarrow 187 = 1 \cdot 96 + 91 \Rightarrow 187 - 1 \cdot 96 = 91 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 96 \\ -1 & 1 & 91 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 9\ 6 & 9\ 1 \\ \hline 5 & 1 \end{array}$$ $\Rightarrow 96 = 1 \cdot 91 + 5 \Rightarrow 96 - 1 \cdot 91 = 5 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 91 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 9\ 1 & 5 \\ \cline{2-2} 4\ 1 & 1\ 8 \\ 1 & \end{array}$$ $\Rightarrow 91 = 18 \cdot 5 + 1 \Rightarrow 91 - 18 \cdot 5 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 18 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -37 & 19 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 5 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$$ $\Rightarrow 5 = 5 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 5 - 5 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 5 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 187 & -96 & 0 \\ -37 & 19 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $96^{-1} = -37 \equiv 150 \pmod{187} \Rightarrow$
$t_2 \equiv 150 \cdot 49 \pmod{187} \Rightarrow t_2 \equiv 7350 \pmod{187} \Rightarrow t_2 \equiv 57 \pmod{187}$
$t_2 = 187t_1 + 57$
$x = 44415t_2 + 32211 \Rightarrow x = 44415 \cdot (187t_1 + 57) + 32211 \Rightarrow$
$x = 8305605t_1 + 2563866$

$$\boldsymbol{x = 8305605t_1 + 2563866 \Leftrightarrow x \equiv 2563866 \pmod{8305605}}$$

Solución directa con sympy: $x = 8305605t_1 + 2563866$
Comprobación:
$39 \cdot 2563866 = 99990774 = 187 \cdot 534710 + 4$
$2 \cdot 2563866 = 5127732 = 135 \cdot 37983 + 27$
$10 \cdot 2563866 = 25638660 = 329 \cdot 77929 + 19$

11. **Resuelve** $\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{7} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 7 \pmod{8} \\ x \equiv 19 \pmod{23} \end{cases}$

Solución Comprobemos que los módulos son coprimos dos a dos:

$$\begin{array}{r|l} 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 23 & 23 \\ 1 & \end{array}$$

mcd(7,3)=1, mcd(7,8)=1, mcd(7,23)=1, mcd(3,8)=1, mcd(3,23)=1, mcd(8,23)=1
La solución de la última ecuación es:
$x = 23t_4 + 19 \Rightarrow$
$19 + 23t_4 \equiv 7 \pmod{8}$ y como $19 = 8 \cdot 2 + 3 \Rightarrow 3 + 23t_4 \equiv 7 \pmod{8} \Rightarrow 23t_4 \equiv 4 \pmod{8}$ y como $23 = 8 \cdot 2 + 7 \Rightarrow 7t_4 \equiv 4 \pmod{8}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 8 & 7 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$
$\Rightarrow 8 = 1 \cdot 7 + 1 \Rightarrow 8$ - $1 \cdot 7 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 7 & 1 \\ \hline 0 & 7 \end{array}$$
$\Rightarrow 7 = 7 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 7$ - $7 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 7 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 8 & -7 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $7^{-1} = -1 \equiv 7 \pmod 8 \Rightarrow$
$t_4 \equiv 7 \cdot 4 \pmod 8 \Rightarrow t_4 \equiv 28 \pmod 8 \Rightarrow t_4 \equiv 4 \pmod 8$
$t_4 = 8t_3 + 4 \Rightarrow$
$x = 23t_4 + 19 \Rightarrow x = 23 \cdot (8t_3 + 4) + 19 \Rightarrow$
$x = 184t_3 + 111 \Rightarrow$
$111 + 184t_3 \equiv 1 \pmod 3$ y como $111 = 3 \cdot 37 \Rightarrow 0 + 184t_3 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 184t_3 \equiv 1 \pmod 3$ y como $184 = 3 \cdot 61 + 1 \Rightarrow 1t_3 \equiv 1 \pmod 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 3 & 1 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$
$\Rightarrow 3 = 3 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 3$ - $3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 3 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $1^{-1} = 1 \Rightarrow$
$t_3 \equiv 1 \cdot 1 \pmod 3 \Rightarrow t_3 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow t_3 \equiv 1 \pmod 3$
$t_3 = 3t_2 + 1 \Rightarrow$
$x = 184t_3 + 111 \Rightarrow x = 184 \cdot (3t_2 + 1) + 111 \Rightarrow$
$x = 552t_2 + 295 \Rightarrow$
$295 + 552t_2 \equiv 0 \pmod 7$ y como $295 = 7 \cdot 42 + 1 \Rightarrow 1 + 552t_2 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow 552t_2 \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow 552t_2 \equiv 6 \pmod 7$ y como $552 = 7 \cdot 78 + 6 \Rightarrow 6t_2 \equiv 6 \pmod 7$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 7 & 6 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$
$\Rightarrow 7 = 1 \cdot 6 + 1 \Rightarrow 7$ - $1 \cdot 6 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 6 & 1 \\ \hline 0 & 6 \end{array}$$
$\Rightarrow 6 = 6 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 6$ - $6 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 6 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $6^{-1} = -1 \equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow$
$t_2 \equiv 6 \cdot 6 \pmod 7 \Rightarrow t_2 \equiv 36 \pmod 7 \Rightarrow t_2 \equiv 1 \pmod 7$

$t_2 = 7t_1 + 1$
$x = 552t_2 + 295 \Rightarrow x = 552 \cdot (7t_1 + 1) + 295 \Rightarrow$
$x = 3864t_1 + 847$

$$\boldsymbol{x = 3864t_1 + 847 \Leftrightarrow x \equiv 847 \pmod{3864}}$$

Solución directa con sympy: $x = 3864t_1 + 847$
Comprobación:
$847 = 7 \cdot 121$
$847 = 3 \cdot 282 + 1$
$847 = 8 \cdot 105 + 7$
$847 = 23 \cdot 36 + 19$

12. **Resuelve** $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \\ x \equiv 6 \pmod 8 \\ x \equiv 10 \pmod{11} \end{cases}$

Solución Comprobemos que los módulos son coprimos dos a dos:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

mcd(3,5)=1, mcd(3,8)=1, mcd(3,11)=1, mcd(5,8)=1, mcd(5,11)=1, mcd(8,11)=1
La solución de la última ecuación es:
$x = 11t_4 + 10 \Rightarrow$
$10 + 11t_4 \equiv 6 \pmod 8$ y como $10 = 8 \cdot 1 + 2 \Rightarrow 2 + 11t_4 \equiv 6 \pmod 8 \Rightarrow 11t_4 \equiv 4 \pmod 8$
y como $11 = 8 \cdot 1 + 3 \Rightarrow 3t_4 \equiv 4 \pmod 8$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$ $\Rightarrow 8 = 2 \cdot 3 + 2 \Rightarrow 8 - 2 \cdot 3 = 2 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$ $\Rightarrow 3 = 1 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 3 - 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$ $\Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $3^{-1} = 3 \Rightarrow$
$t_4 \equiv 3 \cdot 4 \pmod 8 \Rightarrow t_4 \equiv 12 \pmod 8 \Rightarrow t_4 \equiv 4 \pmod 8$
$t_4 = 8t_3 + 4 \Rightarrow$

$x = 11t_4 + 10 \Rightarrow x = 11 \cdot (8t_3 + 4) + 10 \Rightarrow$
$x = 88t_3 + 54 \Rightarrow$
$54 + 88t_3 \equiv 3 \pmod{5}$ y como $54 = 5 \cdot 10 + 4 \Rightarrow 4 + 88t_3 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 88t_3 \equiv -1 \pmod{5}$ $\Rightarrow 88t_3 \equiv 4 \pmod{5}$ y como $88 = 5 \cdot 17 + 3 \Rightarrow 3t_3 \equiv 4 \pmod{5}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 5 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array} \Rightarrow 5 = 1 \cdot 3 + 2 \Rightarrow 5 - 1 \cdot 3 = 2 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 3 = 1 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 3 - 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $3^{-1} = 2 \Rightarrow$
$t_3 \equiv 2 \cdot 4 \pmod{5} \Rightarrow t_3 \equiv 8 \pmod{5} \Rightarrow t_3 \equiv 3 \pmod{5}$
$t_3 = 5t_2 + 3 \Rightarrow$
$x = 88t_3 + 54 \Rightarrow x = 88 \cdot (5t_2 + 3) + 54 \Rightarrow$
$x = 440t_2 + 318 \Rightarrow$
$318 + 440t_2 \equiv 2 \pmod{3}$ y como $318 = 3 \cdot 106 \Rightarrow 0 + 440t_2 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 440t_2 \equiv 2 \pmod{3}$ y como $440 = 3 \cdot 146 + 2 \Rightarrow 2t_2 \equiv 2 \pmod{3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 3 = 1 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 3 - 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $2^{-1} = -1 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow$
$t_2 \equiv 2 \cdot 2 \pmod{3} \Rightarrow t_2 \equiv 4 \pmod{3} \Rightarrow t_2 \equiv 1 \pmod{3}$
$t_2 = 3t_1 + 1$
$x = 440t_2 + 318 \Rightarrow x = 440 \cdot (3t_1 + 1) + 318 \Rightarrow$
$x = 1320t_1 + 758$

$$\boldsymbol{x = 1320t_1 + 758 \Leftrightarrow x \equiv 758 \pmod{1320}}$$

Solución directa con sympy: $x = 1320t_1 + 758$
Comprobación:
$758 = 3 \cdot 252 + 2$
$758 = 5 \cdot 151 + 3$
$758 = 8 \cdot 94 + 6$
$758 = 11 \cdot 68 + 10$

13. **Resuelve** $\begin{cases} 4x \equiv 2 \pmod{9} \\ 5x \equiv 3 \pmod{7} \\ 3x \equiv 4 \pmod{5} \\ 7x \equiv 5 \pmod{22} \end{cases}$

Solución Comprobemos que los módulos son coprimos dos a dos:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 22 & 2 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

mcd(9,7)=1, mcd(9,5)=1, mcd(9,22)=1, mcd(7,5)=1, mcd(7,22)=1, mcd(5,22)=1

Obtengamos el inverso de 4 módulo 9

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{l|l} 9 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \Rightarrow 9 = 2 \cdot 4 + 1 \Rightarrow 9 - 2 \cdot 4 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{l|l} 4 & 1 \\ \hline 0 & 4 \end{array} \Rightarrow 4 = 4 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 4 - 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 4 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 9 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $4^{-1} = -2 \equiv 7 \pmod{9}$ y el mcd(4 , 9)=1

Obtengamos el inverso de 5 módulo 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{l|l} 7 & 5 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \Rightarrow 7 = 1 \cdot 5 + 2 \Rightarrow 7 - 1 \cdot 5 = 2 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{l|l} 5 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \Rightarrow 5 = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 5 - 2 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{l|l} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $5^{-1} = 3$ y el mcd(5 , 7)=1

Obtengamos el inverso de 3 módulo 5

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array} \Rightarrow 5 = 1 \cdot 3 + 2 \Rightarrow 5 - 1 \cdot 3 = 2 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 3 = 1 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 3 - 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -5 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

Por tanto $3^{-1} = 2$ y el mcd(3 , 5)=1

Obtengamos el inverso de 7 módulo 22

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 22\end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 22 & 7 \\ \cline{2-2} 1 & 3 \end{array} \Rightarrow 22 = 3 \cdot 7 + 1 \Rightarrow 22 - 3 \cdot 7 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 3 veces la primera

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 7 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 7 \end{array} \Rightarrow 7 = 7 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 7 - 7 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 7 veces la segunda

$$\begin{pmatrix}22 & -7 & 0\\ -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Por tanto $7^{-1} = -3 \equiv 19 \pmod{22}$ y el mcd(7 , 22)=1

Tenemos las ecuaciones nuevas:

$4x \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow x \equiv 4^{-1} \cdot 2 \pmod{9} \equiv 7 \cdot 2 \pmod{9} \equiv 14 \pmod{9} \equiv 5 \pmod{9}$

$5x \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow x \equiv 5^{-1} \cdot 3 \pmod{7} \equiv 3 \cdot 3 \pmod{7} \equiv 9 \pmod{7} \equiv 2 \pmod{7}$

$3x \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 3^{-1} \cdot 4 \pmod{5} \equiv 2 \cdot 4 \pmod{5} \equiv 8 \pmod{5} \equiv 3 \pmod{5}$

$7x \equiv 5 \pmod{22} \Rightarrow x \equiv 7^{-1} \cdot 5 \pmod{22} \equiv 19 \cdot 5 \pmod{22} \equiv 95 \pmod{22} \equiv 7 \pmod{22}$

El sistema original quedaría $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{9} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 7 \pmod{22} \end{cases}$

La solución de la última ecuación es:

$x = 22t_4 + 7 \Rightarrow$

$7 + 22t_4 \equiv 3 \pmod{5}$ y como $7 = 5 \cdot 1 + 2 \Rightarrow 2 + 22t_4 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 22t_4 \equiv 1 \pmod{5}$ y como $22 = 5 \cdot 4 + 2 \Rightarrow 2t_4 \equiv 1 \pmod{5}$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 5 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array} \Rightarrow 5 = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 5 - 2 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $2^{-1} = -2 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow$
$t_4 \equiv 3 \cdot 1 \pmod{5} \Rightarrow t_4 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow t_4 \equiv 3 \pmod{5}$
$t_4 = 5t_3 + 3 \Rightarrow$
$x = 22t_4 + 7 \Rightarrow x = 22 \cdot (5t_3 + 3) + 7 \Rightarrow$
$x = 110t_3 + 73 \Rightarrow$
$73 + 110t_3 \equiv 2 \pmod{7}$ y como $73 = 7 \cdot 10 + 3 \Rightarrow 3 + 110t_3 \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow 110t_3 \equiv -1 \pmod{7} \Rightarrow 110t_3 \equiv 6 \pmod{7}$ y como $110 = 7 \cdot 15 + 5 \Rightarrow 5t_3 \equiv 6 \pmod{7}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 7 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array} \Rightarrow 7 = 1 \cdot 5 + 2 \Rightarrow 7 - 1 \cdot 5 = 2 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 5 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array} \Rightarrow 5 = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 5 - 2 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -7 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $5^{-1} = 3 \Rightarrow$
$t_3 \equiv 3 \cdot 6 \pmod{7} \Rightarrow t_3 \equiv 18 \pmod{7} \Rightarrow t_3 \equiv 4 \pmod{7}$
$t_3 = 7t_2 + 4 \Rightarrow$
$x = 110t_3 + 73 \Rightarrow x = 110 \cdot (7t_2 + 4) + 73 \Rightarrow$
$x = 770t_2 + 513 \Rightarrow$
$513 + 770t_2 \equiv 5 \pmod{9}$ y como $513 = 9 \cdot 57 \Rightarrow 0 + 770t_2 \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow 770t_2 \equiv 5 \pmod{9}$ y como $770 = 9 \cdot 85 + 5 \Rightarrow 5t_2 \equiv 5 \pmod{9}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 9 & 5 \\ \cline{2-2} 4 & 1 \end{array} \Rightarrow 9 = 1 \cdot 5 + 4 \Rightarrow 9 - 1 \cdot 5 = 4 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 5 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 5 = 1 \cdot 4 + 1 \Rightarrow 5 - 1 \cdot 4 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 4 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array} \Rightarrow 4 = 4 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 4 - 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 4 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $5^{-1} = 2 \Rightarrow$
$t_2 \equiv 2 \cdot 5 \pmod{9} \Rightarrow t_2 \equiv 10 \pmod{9} \Rightarrow t_2 \equiv 1 \pmod{9}$
$t_2 = 9t_1 + 1$
$x = 770t_2 + 513 \Rightarrow x = 770 \cdot (9t_1 + 1) + 513 \Rightarrow$
$x = 6930t_1 + 1283$

$$\boldsymbol{x = 6930t_1 + 1283 \Leftrightarrow x \equiv 1283 \pmod{6930}}$$

Solución directa con sympy: $x = 6930t_1 + 1283$
Comprobación:
$4 \cdot 1283 = 5132 = 9 \cdot 570 + 2$
$5 \cdot 1283 = 6415 = 7 \cdot 916 + 3$
$3 \cdot 1283 = 3849 = 5 \cdot 769 + 4$
$7 \cdot 1283 = 8981 = 22 \cdot 408 + 5$

14. **Resuelve** $\begin{cases} 5x \equiv 6 \pmod{11} \\ 3x \equiv 13 \pmod{16} \\ 2x \equiv 9 \pmod{21} \\ 7x \equiv 19 \pmod{25} \\ 4x \equiv 9 \pmod{13} \end{cases}$

Solución Comprobemos que los módulos son coprimos dos a dos:

$$\begin{array}{r|l} 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

mcd(11,16)=1, mcd(11,21)=1, mcd(11,25)=1, mcd(11,13)=1, mcd(16,21)=1, mcd(16,25)=1, mcd(16,13)=1, mcd(21,25)=1, mcd(21,13)=1, mcd(25,13)=1

Obtengamos el inverso de 5 módulo 11

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 11 & 5 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array} \Rightarrow 11 = 2 \cdot 5 + 1 \Rightarrow 11 - 2 \cdot 5 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 5 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array} \Rightarrow 5 = 5 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 5 - 5 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 5 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 11 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $5^{-1} = -2 \equiv 9 \pmod{11}$ y el mcd(5 , 11)=1

Obtengamos el inverso de 3 módulo 16

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 5 \end{array}$$ ⇒ $16 = 5 \cdot 3 + 1$ ⇒ 16 - $5 \cdot 3 = 1$ ⇒ Restamos a la segunda fila 5 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$ ⇒ $3 = 3 \cdot 1 + 0$ ⇒ 3 - $3 \cdot 1 = 0$ ⇒ Restamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 16 & -3 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $3^{-1} = -5 \equiv 11 \pmod{16}$ y el mcd(3 , 16)=1

Obtengamos el inverso de 2 módulo 21

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 21 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 10 \end{array}$$ ⇒ $21 = 10 \cdot 2 + 1$ ⇒ 21 - $10 \cdot 2 = 1$ ⇒ Restamos a la segunda fila 10 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$$ ⇒ $2 = 2 \cdot 1 + 0$ ⇒ 2 - $2 \cdot 1 = 0$ ⇒ Restamos a la primera fila 2 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 21 & -2 & 0 \\ -10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $2^{-1} = -10 \equiv 11 \pmod{21}$ y el mcd(2 , 21)=1

Obtengamos el inverso de 7 módulo 25

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 25 & 7 \\ \cline{2-2} 4 & 3 \end{array}$$ ⇒ $25 = 3 \cdot 7 + 4$ ⇒ 25 - $3 \cdot 7 = 4$ ⇒ Restamos a la segunda fila 3 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$$ ⇒ $7 = 1 \cdot 4 + 3$ ⇒ 7 - $1 \cdot 4 = 3$ ⇒ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$$ ⇒ $4 = 1 \cdot 3 + 1$ ⇒ 4 - $1 \cdot 3 = 1$ ⇒ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 3 & 1 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$ $\Rightarrow 3 = 3 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 3$ - $3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 3 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 25 & -7 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $7^{-1} = -7 \equiv 18 \pmod{25}$ y el mcd(7 , 25)=1

Obtengamos el inverso de 4 módulo 13

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 13 & 4 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$ $\Rightarrow 13 = 3 \cdot 4 + 1 \Rightarrow 13$ - $3 \cdot 4 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 3 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 4 & 1 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$ $\Rightarrow 4 = 4 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 4$ - $4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 4 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 13 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $4^{-1} = -3 \equiv 10 \pmod{13}$ y el mcd(4 , 13)=1

Tenemos las ecuaciones nuevas:

$5x \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv 5^{-1} \cdot 6 \pmod{11} \equiv 9 \cdot 6 \pmod{11} \equiv 54 \pmod{11} \equiv 10 \pmod{11}$

$3x \equiv 13 \pmod{16} \Rightarrow x \equiv 3^{-1} \cdot 13 \pmod{16} \equiv 11 \cdot 13 \pmod{16} \equiv 143 \pmod{16} \equiv 15 \pmod{16}$

$2x \equiv 9 \pmod{21} \Rightarrow x \equiv 2^{-1} \cdot 9 \pmod{21} \equiv 11 \cdot 9 \pmod{21} \equiv 99 \pmod{21} \equiv 15 \pmod{21}$

$7x \equiv 19 \pmod{25} \Rightarrow x \equiv 7^{-1} \cdot 19 \pmod{25} \equiv 18 \cdot 19 \pmod{25} \equiv 342 \pmod{25} \equiv 17 \pmod{25}$

$4x \equiv 9 \pmod{13} \Rightarrow x \equiv 4^{-1} \cdot 9 \pmod{13} \equiv 10 \cdot 9 \pmod{13} \equiv 90 \pmod{13} \equiv 12 \pmod{13}$

El sistema original quedaría $\begin{cases} x \equiv 10 \pmod{11} \\ x \equiv 15 \pmod{16} \\ x \equiv 15 \pmod{21} \\ x \equiv 17 \pmod{25} \\ x \equiv 12 \pmod{13} \end{cases}$

La solución de la última ecuación es:

$x = 13t_5 + 12 \Rightarrow$

$12 + 13t_5 \equiv 17 \pmod{25} \Rightarrow 13t_5 \equiv 5 \pmod{25}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 25 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 25 & 13 \\ \hline 12 & 1 \end{array}$ $\Rightarrow 25 = 1 \cdot 13 + 12 \Rightarrow 25$ - $1 \cdot 13 = 12 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 \\ -1 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{c|c} 13 & 12 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$ $\Rightarrow 13 = 1 \cdot 12 + 1 \Rightarrow 13$ - $1 \cdot 12 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 12 & 1 \\ \cline{2-2} 02 & 12 \\ 0 & \end{array}$ $\Rightarrow 12 = 12 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 12 - 12 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 12 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -25 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $13^{-1} = 2 \Rightarrow$
$t_5 \equiv 2 \cdot 5 \pmod{25} \Rightarrow t_5 \equiv 10 \pmod{25} \Rightarrow t_5 \equiv 10 \pmod{25}$
$t_5 = 25t_4 + 10 \Rightarrow$
$x = 13t_5 + 12 \Rightarrow x = 13 \cdot (25t_4 + 10) + 12 \Rightarrow$
$x = 325t_4 + 142 \Rightarrow$
$142 + 325t_4 \equiv 15 \pmod{21}$ y como $142 = 21 \cdot 6 + 16 \Rightarrow 16 + 325t_4 \equiv 15 \pmod{21} \Rightarrow 325t_4 \equiv -1 \pmod{21} \Rightarrow 325t_4 \equiv 20 \pmod{21}$ y como $325 = 21 \cdot 15 + 10 \Rightarrow 10t_4 \equiv 20 \pmod{21}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 21 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 21 & 10 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array}$ $\Rightarrow 21 = 2 \cdot 10 + 1 \Rightarrow 21 - 2 \cdot 10 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 2 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 10 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 10 \end{array}$ $\Rightarrow 10 = 10 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 10 - 10 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 10 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 21 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $10^{-1} = -2 \equiv 19 \pmod{21} \Rightarrow$
$t_4 \equiv 19 \cdot 20 \pmod{21} \Rightarrow t_4 \equiv 380 \pmod{21} \Rightarrow t_4 \equiv 2 \pmod{21}$
$t_4 = 21t_3 + 2 \Rightarrow$
$x = 325t_4 + 142 \Rightarrow x = 325 \cdot (21t_3 + 2) + 142 \Rightarrow$
$x = 6825t_3 + 792 \Rightarrow$
$792 + 6825t_3 \equiv 15 \pmod{16}$ y como $792 = 16 \cdot 49 + 8 \Rightarrow 8 + 6825t_3 \equiv 15 \pmod{16} \Rightarrow 6825t_3 \equiv 7 \pmod{16}$ y como $6825 = 16 \cdot 426 + 9 \Rightarrow 9t_3 \equiv 7 \pmod{16}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 16 & 9 \\ \cline{2-2} 7 & 1 \end{array}$ $\Rightarrow 16 = 1 \cdot 9 + 7 \Rightarrow 16 - 1 \cdot 9 = 7 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 1 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 9 & 7 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array}$ $\Rightarrow 9 = 1 \cdot 7 + 2 \Rightarrow 9 - 1 \cdot 7 = 2 \Rightarrow$ Restamos a la primera fila 1 veces la segunda

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 3 \end{array}$ $\Rightarrow 7 = 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 7 - 3 \cdot 2 = 1 \Rightarrow$ Restamos a la segunda fila 3 veces la primera

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 2 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & -9 & 0 \\ -7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $9^{-1} = -7 \equiv 9 \pmod{16} \Rightarrow$
$t_3 \equiv 9 \cdot 7 \pmod{16} \Rightarrow t_3 \equiv 63 \pmod{16} \Rightarrow t_3 \equiv 15 \pmod{16}$
$t_3 = 16t_2 + 15 \Rightarrow$
$x = 6825t_3 + 792 \Rightarrow x = 6825 \cdot (16t_2 + 15) + 792 \Rightarrow$
$x = 109200t_2 + 103167 \Rightarrow$
$103167 + 109200t_2 \equiv 10 \pmod{11}$ y como $103167 = 11 \cdot 9378 + 9 \Rightarrow 9 + 109200t_2 \equiv 10 \pmod{11} \Rightarrow 109200t_2 \equiv 1 \pmod{11}$ y como $109200 = 11 \cdot 9927 + 3 \Rightarrow 3t_2 \equiv 1 \pmod{11}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 11 & 3 \\ \hline 2 & 3 \end{array} \Rightarrow 11 = 3 \cdot 3 + 2 \Rightarrow 11 - 3 \cdot 3 = 2 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 3 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \Rightarrow 3 = 1 \cdot 2 + 1 \Rightarrow 3 - 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow \text{Restamos a la primera fila 1 veces la segunda}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + 0 \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \text{Restamos a la segunda fila 2 veces la primera}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -11 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $3^{-1} = 4 \Rightarrow$
$t_2 \equiv 4 \cdot 1 \pmod{11} \Rightarrow t_2 \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow t_2 \equiv 4 \pmod{11}$
$t_2 = 11t_1 + 4$
$x = 109200t_2 + 103167 \Rightarrow x = 109200 \cdot (11t_1 + 4) + 103167 \Rightarrow$
$x = 1201200t_1 + 539967$

$$\boldsymbol{x = 1201200t_1 + 539967 \Leftrightarrow x \equiv 539967 \pmod{1201200}}$$

Solución directa con sympy: $x = 1201200t_1 + 539967$
Comprobación:
$5 \cdot 539967 = 2699835 = 11 \cdot 245439 + 6$
$3 \cdot 539967 = 1619901 = 16 \cdot 101243 + 13$
$2 \cdot 539967 = 1079934 = 21 \cdot 51425 + 9$
$7 \cdot 539967 = 3779769 = 25 \cdot 151190 + 19$
$4 \cdot 539967 = 2159868 = 13 \cdot 166143 + 9$